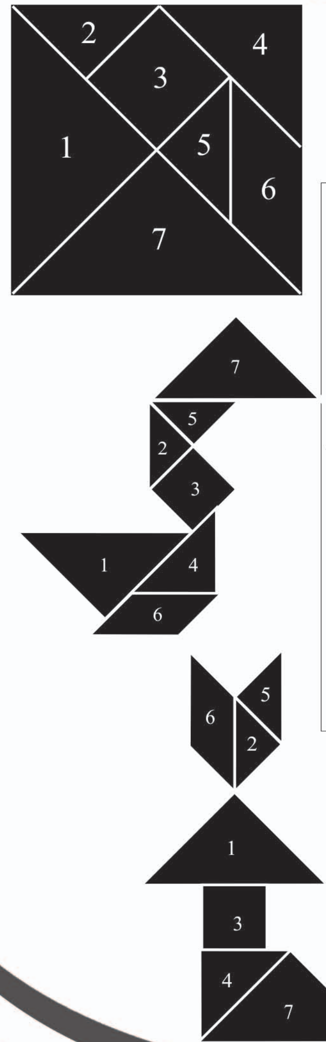
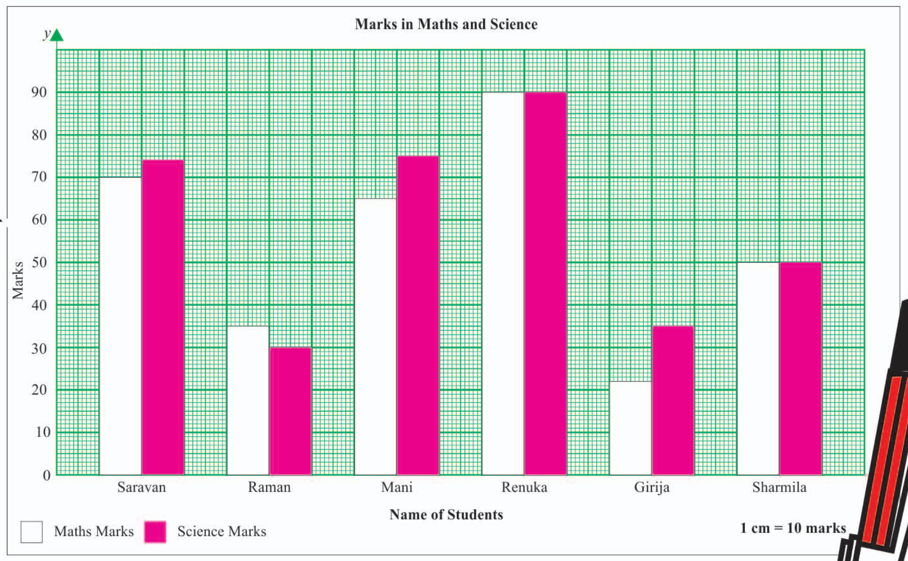
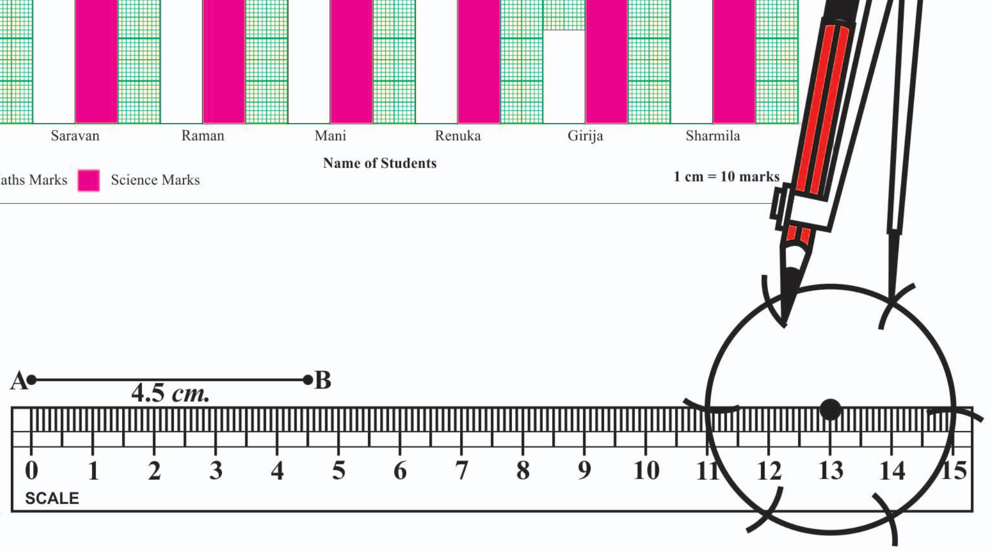
RESOURCE MATERIAL FOR MATHEMATICS

6th to 10th Classes







पढ़े चलो, बढ़े चलो
RASHTRIYA MADHYAMIK SHIKSHA ABHIYAN

విషయపరిజ్ఞాన దీపిక

గణితం

ఉన్నత స్థాయి

రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ,
తెలంగాణ, హైదరాబాదు

పాఠశాల విద్యా శాఖ
తెలంగాణ ప్రభుత్వం

విషయపరిజ్ఞాన దీపిక

గణితం

6 నుండి 10 తరగతులు

రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ

తెలంగాణ హైదరాబాదు.

రూపకల్పనలో పాల్గొన్నవారు

డా॥ ఎ. రాంబాబు, ఉపన్యాసకులు, ప్రభుత్వ ఉపాధ్యాయ కళాశాల, వరంగల్
శ్రీ కె.కె.వి రాయలు, ఉపన్యాసకులు, ఐ.ఎ.ఎస్.ఇ., మాసబ్‌ట్యాంక్, హైదరాబాదు.
శ్రీ ఎమ్. రామాంజనేయులు, ఉపన్యాసకులు (ప్రిన్సిపల్ (ఎఫ్.ఎ.సి) ప్రభుత్వ జిల్లా విద్యాశిక్షణా సంస్థ, వికారాబాద్, రంగారెడ్డి
శ్రీ కె. నారాయణరెడ్డి, ఉపన్యాసకులు, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణా సంస్థ, తెలంగాణ, హైదరాబాదు.
శ్రీ జి. అనంతరెడ్డి, రిటైర్డు, ప్ర.ఉ., రంగారెడ్డి
శ్రీ ఎస్. ధర్మేందర్‌సింగ్, స్కూలు అసిస్టెంట్, ప్రభుత్వ జిల్లా విద్యాశిక్షణ సంస్థ, ఆదిలాబాదు.
శ్రీ కె. శ్రీధరాచార్యులు, స్కూలు అసిస్టెంట్, జి.ప.ఉ.పా., నార్సింగి, మెదక్.
శ్రీ ఆర్. లక్ష్మీనర్సింహమూర్తి, స్కూలు అసిస్టెంట్, జి.ప.ఉ.పా., తూప్రాన్‌పేట, నల్గొండ.
డా॥ ఎ. యాకయ్య, స్కూలు అసిస్టెంట్, ప్ర.ఉ.పా., పోలీస్ బాయస్, అంబర్‌పేట్, హైదరాబాదు.
శ్రీ కె. రామయ్య, స్కూలు అసిస్టెంట్, జి.ప.ఉ.పా., ఖాసీందేవ్‌పేట్, వరంగల్
శ్రీ ఎం.డి.ఫసియోద్దీన్, స్కూలు అసిస్టెంట్, ప్ర.ఉ.పా., షాషాబ్‌గుట్ట, మహబూబ్‌నగర్.
శ్రీ జి. భరత్‌రెడ్డి, స్కూలు అసిస్టెంట్, జి.ప.ఉ.పా., మంథని, కరీంనగర్
శ్రీ పి.డి.ఎల్ గణపతి శర్మ, స్కూలు అసిస్టెంట్, ప్ర.ఉ.పా., జమిస్తాన్‌పూర్, హైదరాబాదు.
శ్రీ పి. సురేష్ కుమార్, స్కూలు అసిస్టెంట్, ప్ర.ఉ.పా., విజయనగర్ కాలనీ, హైదరాబాదు.
శ్రీ కె.రాజేందర్‌రెడ్డి, స్కూలు అసిస్టెంట్, స్టేట్ రిసోర్స్ గ్రూప్ సభ్యులు, ప్రా.ఉ.పా., చిమిర్యాల, నల్గొండ.

విషయనిపుణులు

శ్రీ ఎమ్.ఎస్. రంగాచారి, రిటైర్డ్ లెక్చరర్, ప్రభుత్వ డిగ్రీ కళాశాల, వరంగల్
డా॥ శరణ్ గోపాల్, అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, బి.ఐ.టి.ఎస్., హైదరాబాదు క్యాంపస్.

ఎడిటింగ్ మరియు సమన్వయం

డా. ఎన్. సురేష్‌బాబు
గణిత – సామాన్యశాస్త్ర విభాగాధిపతి,
రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన, శిక్షణా సంస్థ, తెలంగాణ, హైదరాబాదు

శ్రీ కె.రాజేందర్‌రెడ్డి
స్కూలు అసిస్టెంట్, స్టేట్ రిసోర్స్ గ్రూప్ సభ్యులు,
ప్రా.ఉ.పా. చిమిర్యాల, నల్గొండ.

సలహాదారు

శ్రీ జగన్నాథ రెడ్డి, సంచాలకులు
రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన, శిక్షణా సంస్థ, తెలంగాణ, హైదరాబాదు

ముఖ్యసలహాదారు

శ్రీ జి. కిషన్ ఐ.ఎ.ఎస్,
సంచాలకులు, పాఠశాల విద్య, తెలంగాణ, హైదరాబాదు.

కవర్‌పేజ్ డిజైనింగ్ : **శ్రీ కె. సుధాకరాచారి,** ఎస్.జి.టి., యు.పి.స్. నీలికుర్తి, మం.మరిపెడ, జి.వరంగల్
డి.టి.పి&పేజి లేఅవుట్: **శ్రీ సుంకర కోటేశ్వరరావు, శ్రీమతి సునీత,** డిటిపి ఆపరేటర్స్, పవన్ గ్రాఫిక్స్, హైదరాబాద్.

సందేశం

బడి ఈడు పిల్లలందరూ బడిలో చేరి పూర్తికాలం బడిలో నాణ్యమైన విద్యను పొందడానికి ప్రభుత్వం అనేక కార్యక్రమాలను నిర్వహించడం జరుగుచున్నది. అందుబాటు, నమోదు వంటి విషయాలలో గణనీయమైన ప్రగతి సాధించినప్పటికీ నాణ్యమైన విద్య ఇప్పటికీ సవాలుగానే ఉంది. ఈ దశాబ్దంలో వచ్చిన కీలకమైన జాతీయ విద్యాప్రణాళిక చట్రం (NCF) – 2005, ఉచిత నిర్బంధ విద్యాహక్కు చట్టం (RTE) – 2009, రాష్ట్ర పాఠ్యప్రణాళిక చట్రం (SCF) – 2011 దేశంలో, రాష్ట్రంలో అనేక మార్పులకు కారణమయ్యాయి. వీటిలో భాగంగా నూతన పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పన, నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం వంటి వాటిని పాఠశాలల్లో అమలు చేస్తున్నాం. అలాగే సమాజం, తల్లిదండ్రుల దృక్పథంలో కూడా మార్పు వచ్చింది. ఆంగ్ల మాధ్యమం, ఉన్నత చదువులు చదివించడం వంటి వాటిపై వారు ఎక్కువ ఆసక్తి చూపుతున్నారు. ఈ నేపథ్యంలో ప్రస్తుతం విద్యా లక్ష్యాలను సాధించేలా ఉపాధ్యాయులు పనిచేయవలసి ఉన్నది.

నూతన పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పన, నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం అమలు అనంతరం ఉపాధ్యాయులకు వాటిపై అవగాహన కల్పించుటకు అనేక శిక్షణలు ఇవ్వడం జరిగింది. అయితే ఆ శిక్షణలన్నీ ఎక్కువ బోధనాభ్యసన ప్రక్రియకు సంబంధించినవే. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల గురించి ఇచ్చిన ఆ శిక్షణల అనంతరం నిర్వహించిన సర్వేలలో ఉపాధ్యాయులు నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలో కొన్ని అంశాలకు మరింత వివరణ అవసరమని, విషయ పరిజ్ఞానాన్ని అందించేటట్లుగా మరింత సమాచారం ఇచ్చి దానిపై శిక్షణ ఇవ్వాలని కోరడం జరిగింది. ఈ నేపథ్యంలో పాఠ్యపుస్తకాలలోని పాఠ్యాంశాలను నిశితంగా పరిశీలించి భావనల అవగాహనకు అవసరమైన, మరింతలోతైన విషయ పరిజ్ఞానం అందించాల్సిన అంశాలను గుర్తించి ఈ కరదీపికను రూపొందించడం జరిగింది. ఇందుకు క్షేత్రస్థాయిలో పాఠశాలల్లో పనిచేసే ఉపాధ్యాయులు, పాఠ్యపుస్తక రచయితలు, సంపాదకులతోపాటు ఇంటర్, డిగ్రీ, విశ్వవిద్యాలయం ఆచార్యులు, అధ్యాపకులు, స్టేట్ రిసోర్స్ గ్రూప్ సభ్యుల సహాయం తీసుకోవడం జరిగింది.

ప్రభుత్వ విద్యలో నాణ్యతను పెంచడానికి, బలోపేతం చేయడానికి విద్యాశాఖ అనేక ప్రయత్నాలు చేస్తున్నది. ఉపాధ్యాయుల పరంగా ఎప్పటికప్పుడు నూతన పరిజ్ఞానాన్ని అందిపుచ్చుకొని విద్యార్థులకు అందజేయడం వారి బాధ్యత. "వెలిగే దీపమే మరికొన్ని దీపాలను వెలిగించగలదు" అన్నట్లు టీచర్లు నిత్యవిద్యార్థులు అయినప్పుడే విద్య ఫలవంతమవుతుంది. ఈ కరదీపికలోని అంశాలు పాఠ్యాంశ బోధనలో ఉపాధ్యాయులకు ఎంతో సహకరిస్తాయని, దీంతోపాటు అనేక నూతనాంశాలు ఎప్పటికప్పుడు తెలుసుకొని బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వినియోగించి విద్యార్థులకు అందించి వారిని మరింత ప్రతిభావంతులుగా తీర్చిదిద్దుటలో ఉన్న అన్ని అవకాశాలను అందిపుచ్చుకొని బాధ్యతలు నిర్వహిస్తారని భావిస్తున్నాను.

విద్యార్థులకు ఎంత సమాచారం అందుబాటులో ఉన్నను దానిని జ్ఞానంగా మార్చడంలో ఉపాధ్యాయులు ముందుండాలి. అందుకు ఈ కరదీపికను సమర్థవంతంగా వాడుకొని విద్యార్థులను తీర్చిదిద్దుటలో కృషిచేస్తారని ఆశిస్తూ.....

స్థలం : హైదరాబాదు.

తేది : 18–06–2016

జి. కిషన్, ఐ.ఎ.ఎస్.
కమీషనర్ మరియు డైరెక్టర్,
పాఠశాల విద్య, తెలంగాణ

తొలిపలుకులు

రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణ సంస్థ రాష్ట్రంలోని విద్యా అవసరాలను గుర్తించి ఎప్పటికప్పుడు మార్గదర్శనం చేస్తూ అవసరమైన వనరులను కల్పిస్తుంది. గత ఐదు సంవత్సరాలలో నూతన పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పన, నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం అమలు వంటి విద్యా సంస్కరణలను చేపట్టింది. అలాగే వాటి అమలు తీరును అధ్యయనం చేస్తున్నది. దేశంలో విద్యాపరంగా వచ్చిన అనేక మార్పులకు అనుగుణంగా అన్ని అంశాలను అధ్యయనం చేసి రాష్ట్రస్థాయిలో పాఠశాలలకు అందుబాటులోకి తెస్తున్నది. ప్రస్తుతం నూతన జ్ఞానం ఒక విస్ఫోటనంలా రోజు రోజుకూ మనకు అందుబాటులోకి వస్తున్నది. ఈ జ్ఞానం ఉపాధ్యాయుల ద్వారా విద్యార్థులకు అందవలసి ఉన్నది. కాబట్టి ఉపాధ్యాయులు వివిధ వనరుల ద్వారా నూతన జ్ఞానాన్ని పొంది దానిని విద్యార్థులకు అందజేయాల్సిన అవసరం ఉంది.

ప్రపంచం ఒక కుగ్రామమై, సాంకేతికత మన చేతిలో ఇమిడి పోయి మనకవసరమైన సెకన్లలో మనకు చేరువవుతున్న ప్రస్తుత తరుణంలో ఉపాధ్యాయులు కూడా అంతే వేగంగా మార్పులను స్వీకరించి వాటిని బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వినియోగించుకోగలగాలి. ప్రస్తుత నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలోని అంశాలను మరింత వివరంగా చర్చించాలని టీచర్లు సర్వేలలో వెలిబుచ్చిన అభిప్రాయాలకు అనుగుణంగా ఈ కరదీపిక రూపొందించడం జరిగింది. కరదీపికలోని అంశాలు ప్రస్తుత పాఠ్యాంశాలను మరింత బాగా వివరించడానికి ఉపకరిస్తాయి. విస్తృత అధ్యయానికి తోడ్పడుతాయి. పాఠ్యాంశ వివరణలో ఏవయినా సందేహాలుంటే తీరుస్తాయి. ఉన్నత తరగతుల పాఠ్యాంశాలతో ఉపాధ్యాయులకు బోధనాభ్యసనలో ఎంతో తోడ్పడుతాయి.

ఎంత గొప్ప వనరులయినా, పుస్తకాలయినా ఉపాధ్యాయుల పనితీరుకు సరితూగవు. కాని ఉపాధ్యాయులు వీటిని సమర్ధవంతంగా ఉపయోగించుకున్నప్పుడు, బోధనాభ్యసనలో వాడినప్పుడు ఫలితాలు సాధించడం సులువవుతుంది. కాబట్టి టీచర్లు ఈ కరదీపికలోని అంశాలను క్షుణ్ణంగా అవగాహన చేసుకొని, తోటి ఉపాధ్యాయులతో చర్చించాలి. తరగతి గది బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలలో వీటికి చోటు కల్పించాలి. మన విద్యార్థులు ఎక్కడైనా, ఏ సందర్భంలోనైనా అందరికీ పోటీనిచ్చే విధంగా తయారుకావాలి. విద్యార్థులను అలా తీర్చిదిద్దడంలో మరియు మీ వృత్తి నిర్వహణలో ఈ కరదీపిక ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుందని, దీనిని ఉపయోగించి మెరుగైన ఫలితాలు సాధిస్తారని ఆశిస్తూ.....

ఎస్. జగన్నాథ్‌రెడ్డి
సంచాలకులు
రాష్ట్రవిద్యా పరిశోధన శిక్షణ సంస్థ,
తెలంగాణ

స్థలం : హైదరాబాదు.
తేది : 18-06-2016

మాడ్యులు ఉపయోగించుకొనుటకు సూచనలు

- ఈ మాడ్యులు 6 నుండి 10 తరగతుల గణిత పాఠ్యపుస్తకాల్లోని వివిధ భావనలు, కృత్యాలు, వివిధ రకాల అభ్యాసాలను నిర్వహించడం కోసం కావలసిన అవగాహనను పొందడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
- మాడ్యుల్లో పొందుపరచిన అంశాలు ఏ తరగతికి ఆ తరగతిలోని అంశాలకు పరిమితం కాకుండా 6 నుండి10 తరగతుల్లో చర్చించిన అంశాలను రంగాల వారీగా ఎన్నుకొని చర్చించడమైనది. అనగా 6వ తరగతిలో ప్రవేశపెట్టిన భావనల నుండి 10వ తరగతి వరకు చర్చించిన భావనల వరకు మొత్తంగా విశ్లేషిస్తూ అవగాహన కల్పించడానికి ఉద్దేశించబడినది.
- కావున ఇందులోని అంశాలను గమనించి సందర్భానుసారంగా బోధించే తరగతిలోని భావనలను అనుసంధానించుకొని అవగాహన చేసుకోవలసి ఉంటుంది.
- మాడ్యుల్లో చర్చించిన అంశాలు ప్రధానంగా పిల్లలను దృష్టిలో పెట్టుకొని వారిని ఎలా ఆలోచింపజేయలి? ఎలా (తార్కికంగా) కారణాలను అన్వేషించాలి? అనే దృక్కోణంతో బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు నిర్వహించడానికి ఉపాధ్యాయునికి మార్గదర్శనం చేస్తుంది. కావున ప్రతి అంశాన్ని పిల్లల అభ్యసనానుకూలతను దృష్టిలో పెట్టుకొని ఆలోచించి అవగాహన చేసుకొని అమలుపరచాలి.
- ఉపాధ్యాయులుగా మనం మాడ్యులులో చర్చించిన అంశాలకే పరిమితం కాకుండా యింకా అదనపు అంశాలు కూడా జోడించుకోవచ్చు. అయితే ఇవి పిల్లల్లో భావనల అవగాహనకు వాటి మధ్య సంబంధాలు తెలుసుకొనుటకు దోహదపడేలా ఉండాలి.
- ఈ మాడ్యూలులో చర్చించిన అంశాలను ఏ తరగతిలో ఏమేమి చర్చించబడినవో పట్టికరూపంలో ఇవ్వబడినవి. కావున ఒక అంశాన్ని బోధించే ముందు ఆ అంశానికి సంబంధించిన కనీస సామర్థ్యాలు ఏయే తరగతిలో ఉన్నాయి గుర్తించుట సులువు అవుతుంది.
- ఈ మాడ్యులు నందు భావనల పరిచయం విద్యార్థులకు ఏవిధంగా చేయాలో? అదనపు కృత్యాలను ఏయే సందర్భాలలో రూపొందించుకుని తరగతి గదిలో పిల్లలచే నిర్వహింపచేయాలో? కొన్ని భావనలు,

కొన్ని నమూనా కృత్యాలు, పాఠ్యపుస్తకంలో లేనివి అదనంగా కొన్ని జోడించబడినవి. వాటిని సందర్భానుసారంగా అవగాహన చేసుకొని అమలు పరచాలి. దీనివల్ల ఇలాంటి కృత్యాలు మీరు మరికొన్నింటిని తయారు చేసుకోగలుగుతారు లేదా సేకరించగలుగుతారు.

- తరగతిలో బోధన అభ్యసన సమయంలో పిల్లలు – ఉపాధ్యాయుల బాధ్యతలను ఈ మాడ్యులు స్పష్టపరుస్తున్నది. ఎలా అంటే ఎక్కువ అంశాల్లో ప్రతి భావన మరియు అభ్యాసాలలోని సమస్యల సాధనలు అవగాహన చేసుకొను సందర్భాలలో పిల్లలు ఏమి చేయాలి? ఉపాధ్యాయులు పిల్లలతో ఎలా చర్చింపజేయాలి? ఎలా మూల్యాంకనం చేయాలి? మొదలగు అంశాలు విస్పష్టంగా ఈ మాడ్యులునందు ఇమిడి ఉన్నాయి.
- ఈ మాడ్యులు నందు విషయాన్ని బోధనా పద్ధతులతో జోడించి విశ్లేషణాత్మకంగా అధ్యాయాలు రూపొందించబడినవి. ఇవి చదవడం అవగాహన చేసుకోవడం వల్ల ఉపాధ్యాయునికి తాను బోధించే అంశాల పట్ల ఒక ప్రాథమిక అవగాహన ఏర్పడుతుంది.
- ఈ మాడ్యులును తరగతి బోధనకు ముందుగా తప్పక చదివి అవగాహన చేసుకున్న తర్వాత మీ బోధనా విధానంలో ఒక మంచి మార్పును – పిల్లల అభ్యసనలో ప్రగతిని పొందగలుగుతారు.
- ప్రతి ఉపాధ్యాయుడు సదుద్దేశంలో తరగతికి వెళతారు. మన ఉద్దేశం ఆశించిన రీతిలో సఫలం కావడంలో ఈ మాడ్యులు మీకు తప్పక సహకరిస్తున్నదని ఆశిస్తునాం.

విషయసూచిక

1

సంఖ్యావ్యవస్థ

"అవసరం ఆవిష్కరణలకు మూలం"

ఉపోద్ఘాతము

అనాది నుండి మానవుడు తన అవసరాల కొరకు సంఖ్యావ్యవస్థను ఉపయోగిస్తున్నాడు. ఈ అధ్యాయంలో సంఖ్యాసమితులు వాటి ధర్మాల గురించి సంక్షిప్తంగా మాత్రమే పేర్కొనడం జరిగింది. సంఖ్యావ్యవస్థలోని కొన్ని విషయాలలో చాలా విరుద్ధతలు ఉన్నాయి. మన సౌకర్యం కొరకు మన పాఠ్యపుస్తకాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని వీటి గురించి చర్చించలేదు. సంఖ్యావ్యవస్థల సమగ్ర అవగాహన వీక్షణ కొరకు సంక్షిప్తీకరించబడింది. కొన్ని ముఖ్యమైన వాటికి కృత్యాలు ఇవ్వబడినాయి. మధ్య మధ్యలో అవగాహనను పరీక్షించుకొనుటకు కొన్ని "స్వీయప్రతి స్పందనలు" ఇవ్వబడినవి మొత్తం యూనిట్‌లో మూడు అంశాలను ప్రత్యేక శిక్షణ కొరకు తయారుచేయబడినాయి. (1) యూక్లీడ్ భాగహార శేషవిధి (2) కరణులు (3) సంవర్గమానాలు ఇవే కాకుండా గణితంలో సరదా కొరకు మెదడుకు మేత కొరకు అమరికలు, విస్తృత అవగాహనా కొరకు అదనపు సమాచారం, ప్రాజెక్ట్‌పని మరియు రెఫరెన్స్ గ్రంథాలు పొందుపరచడం జరిగినది.

వీటిని అవగాహన పరుచుకోవడానికి ముందు మీరు ఏఏ అంశాలు ఏఏ తరగతిలో పిల్లలకు అవగాహన పరుస్తున్నాయో, వాటికి సంబంధించిన వివరాలు పట్టికలో చూపడమైనది. వాటిని పరిశీలించండి. ప్రధానంగా వాటిలో సంఖ్యావ్యవస్థ, వాటి ధర్మాలు, వీటి అనువర్తనము, వీటిపై ఆధారపడి ఉన్న అదనపు మౌళికాంశాలు గురించి అవగాహన పొందుతూ 8, 9, 10 తరగతుల్లో చర్చించిన ప్రధానమైన కరణులు, యూక్లిడ్ భాగహార శేషనిధి, సంర్గమానం మొదలైన అంశాలపై తరగతి గదిలో సమర్థవంతంగా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు కల్పించుటకు కావల్సిన అవగాహన ఈ అధ్యాయంలో చర్చించిన అంశాల ఆధారంగా పొందుదాం.

I. సంఖ్యావ్యవస్థలోని అంశాలు తరగతుల వారీగా విభజన

6th	7th	8th	9th	10th
• సహజసంఖ్యలు • పూర్ణాంకాలు • పూర్ణాంకాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించుట • సంఖ్యారేఖపై పూర్ణాంకంల సంకలనం, వ్యవకలనం మరియు గుణకారం • పూర్ణాంకాల ధర్మాలు • సున్నాతో భాగహారం • పూర్ణాంకాలలో అమరికలు • సంఖ్యల అమరిక • పూర్ణసంఖ్యల పరిచయం • పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించుట • పూర్ణసంఖ్యల క్రమం • పూర్ణసంఖ్యలపై చతుర్విధ ప్రక్రియలు	• పూర్ణసంఖ్యలు • చతుర్విధ ప్రక్రియలు, ధర్మాలు • సామాన్యభిన్నంలు • దశాంశంలు • అకరణీయ సంఖ్యలు • అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చుట • ఘాతాంకాలు	• అకరణీయ సంఖ్యలు • వాటి ధర్మాలు • సున్నా యొక్క పాత్ర • 1 యొక్క పాత్ర • అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖ పై చూపుట • అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో చూపుట (అంతమయ్యే / అంతంగాని ఆవర్తన దశాంశం) • దశాంశ భిన్నంలను అకరణీయ సంఖ్యారూపంలో చూపుట • ఘాతాంకములు, ఘాతాలు • వర్గమూలాలు, ఘనమూలంలు	**వాస్తవ సంఖ్యలు** • వాస్తవ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై చూపుట • కరణీయ సంఖ్యలు • π విలువ • కరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖ పై చూపుట • వాస్తవ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై క్రమానుగత వర్ధనం ద్వారా చూపుట • వర్గమూల సూత్రం • వాస్తవ సంఖ్యలపై పరిక్రియలు • వాస్తవ సంఖ్యలపై ఘాతాంక న్యాయాలు • కరణి	• వాస్తవ సంఖ్యలు • యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి • అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం • అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపం • సంవర్గమానాలు – సంవర్గమాన న్యాయాలు

- మానవుడు వస్తువుల / జంతువుల సమూహాన్ని లెక్కించడం కొరకు అంకెలను కనుగొన్నాడు. వీటి సంఖ్యను బట్టి ఆ పద్ధతికి ఆమానం పేరు పెట్టారు.

  – పది గుర్తులు 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (దశాంశమానం)

  – రెండు గుర్తులు 0, 1 (ద్విసంఖ్యామానం)

  – ఏడు గుర్తులు 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (సప్తాంశమానం)

  – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Y, Z (ద్వాదశాంశమానం)

  – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (షోడశాంశమానం)

  – ద్విసంఖ్యామానం, షోడశాంశమానములను కంప్యూటర్లలలో వాడతారు.

- వస్తువుల మార్పిడి సందర్భంగా ఒక సంఖ్య నుండి ఆ సంఖ్యను తీసివేస్తె మిగిలెవి తెలుపడానికి $(a - a = 0)$ '0' గుర్తును ఆవిష్కరించాడు.

  ఇదేవిధంగా ముందూ, వెనుక; పైకి, క్రిందికి గల దూరాలను తెలుపడానికి ఋణ సంఖ్యలను ఆవిష్కరించారు.

- గణితం గుర్తులతో కూడుకున్న భాష

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 అనే పది గుర్తులను "అంకెలు" అని అంటారు.

- ఒక అంకె లేదా అంతకంటె ఎక్కువ అంకెల చేత "సంఖ్యలు" ఏర్పడుతాయి.

- పై పదిఅంకెల గల సంఖ్యామానంను "దశాంశమానం" అని అంటారు.

- దశాంశమానంలో రాయడానికి పది అంకెలను మాత్రమే ఉపయోగిస్తాం. కావున దీనిని భూమి లేదా ఆధారం 10గా గల సంఖ్యామానం అంటారు.

10 అంకెలతో రాయగలిగిన సంఖ్యామానం "దశాంశమానం"

- దశాంశమానం భారతీయులు ప్రపంచానికి ఇచ్చిన కానుక.

- దశాంశమానం ప్రపంచంలో ప్రాచుర్యం పొందటానికి ముఖ్యముగా సున్నను ఉపయోగిస్తూ సులభంగా గణనకు అనుకూలంగా ఉండడం.

అరబ్బులు భారతీయ గణితజ్ఞులు వ్రాసిన గణిత పుస్తకాలను తమభాషలోనికి అనువదించుకొని ఉపయోగించుకొనేవారు. యూరోపియన్లు అరబ్బుల గణిత పుస్తకాలను అధ్యయనం చేయడం వల్ల హిందువులు అరబ్బులు ఆనాటికి వాడే మానం హిందు అరబిక్ మానం అన్నారు.

"హిందూ - అరబిక్ సంఖ్యామానం" :

పది కోట్లు	కోట్లు	పది లక్షలు	లక్షలు	పది వేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

- దశాంశమానంలో ఒకట్ల స్థానంలోని ప్రతి అంకె యొక్క స్థాన, సహజ విలువలు సమానం.
- '0' ఏ స్థానంలో ఉన్నను దాని స్థాన, సహజవిలువలు సమానం
- లెక్కించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలను గణన సంఖ్యలు అంటారు. వీటినే సహజసంఖ్యలు (Natural numbers) అని కూడా అంటారు. సహజసంఖ్యల సమితిని N అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

  N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

  సమితుల ఆధారంగా గణితాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి సహజసంఖ్యాసమితి '0'ను కలుపుకొని వ్రాస్తారు. N = {1, 2, 3, ...} సంఖ్యావాదం (Theory of Numbers) ఆధారంగా గణితాన్ని అధ్యయనం చేసేవారు. 1తో మొదలు పెట్టి N = {1, 2, 3, ...} అనేది చూడవచ్చును. ఐతే 0తో మొదలు పెడితే W, (Whole numbers) పూర్ణసంఖ్యల గురించి చెప్పనవసరం లేదు. ($N \simeq W$) అవసరంలేదు.

- సహజ సంఖ్యాసమితికి "0"ను చేర్చితే "పూర్ణాంకసమితి" (whole numbers) ఏర్పడుతుంది. దీనిని "W"తో సూచిస్తారు.

  W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }

  $W = \{0\} \cup N$

  సరిసంఖ్యలు : 2చే భాగించగా శేషం "0" వచ్చు సహజసంఖ్యలను "సరిసంఖ్యలు" అని అంటారు.

సరిసంఖ్యల యొక్క సాధారణ రూపం 2n; $\forall\ n \in Z$

  దీనిలో ఋణ సరిసంఖ్యలు, సున్నా, ధన సరిసంఖ్యలు ఉంటాయి కాని కొన్ని సందర్భాలలో ధన సరిసంఖ్యలను మాత్రమే తీసుకోవలసి వస్తుంది. ఈ సందర్భంలో సరిసంఖ్యల సాధారణ రూపం 2n; $\forall\ n \in N(Z^+)$ అని వ్రాస్తాము.

- 6 నుండి మొదలయ్యే సరిసంఖ్యల సమితి ఏవిధంగా వ్రాస్తారో ప్రయత్నించండి.

బేసి సంఖ్యలు : 2 చే భాగించగా శేషం “1” వచ్చు సహజ సంఖ్యలను “బేసి సంఖ్యలు” అని అంటారు.

బేసిసంఖ్యల యొక్క సాధారణ రూపం $2n - 1; \quad \forall\ n \in N$

గుణిజాలు : ఒక సంఖ్యను, సహజసంఖ్య (ధనపూర్ణ సంఖ్య Z^+) చే గుణించగా వచ్చు లబ్దంను ఆ సంఖ్య యొక్క “గుణిజం” అని అంటారు. ఉదా: n యొక్క గుణిజాలు n, 2n, 3n, 4n, ...

- ఒక సంఖ్య యొక్క గుణిజాలు అనంతం
- ప్రతి సంఖ్యకు అదే సంఖ్య కనిష్ట గుణిజం కాని గరిష్ట గుణిజంను చెప్పలేము(అనంతం)

  – సామాన్య గుణిజాలు, క.సా.గు.

కారణాంకాలు : ఒక సంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగించే సహజ సంఖ్యలను ఆ సంఖ్య యొక్క “కారణాంకము” అని అంటారు.

- ఒక సంఖ్యకు వ్యవస్థితమయ్యే కారణాంకాలు పరిమితం ఒకటి ప్రతి సంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగించడం వలన ఒకటి(1) ప్రతి సంఖ్యకు కారణాంకం.
- ప్రతి సంఖ్యకు 1 మరియు అదే సంఖ్య కారణాంకాలు అవుతాయి.

  – సామాన్యకారణాంకాలు, గ.సా.కా.

ప్రధాన సంఖ్యలు : 1 మరియు ఆ సంఖ్య మాత్రమే కారణాంకములుగా ఉన్న సంఖ్యలను “ప్రధానసంఖ్యలు” అంటారు.

- ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం
- ప్రధాన సంఖ్యలును గుర్తించుట కొరకు సాధారణ సూత్రం లేదు. కాని “ఎరటోస్తనీస్ జల్లెడ” పద్ధతి ప్రధాన సంఖ్యలను కనుగొనటానికి ఉపయోగపడ్తుంది.
- ప్రధానసంఖ్యలలో 2 మాత్రమే సరిసంఖ్య.
- కవల ప్రధానసంఖ్యలు : రెండు వరుస ప్రధాన సంఖ్యల భేదము 2 గా ఉండే ప్రధాన సంఖ్యల జతను “కవల ప్రధాన సంఖ్యలు” (Twin primes) అని అంటారు.

  ఉదా: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31) .....

గ.సా.భా (G .C.D) లేదా గ.సా.కా (H.C.F) :

- ప్రతి సహజసంఖ్యకు వ్యవస్థితం అయ్యేకారణాంకముల సంఖ్య పరిమితం.
- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సంఖ్యలకు వ్యవస్థితం అయ్యే సామాన్య కారణాంకములలో కనిష్ట కారణాంకము 1 (ప్రతి సంఖ్యకు 1 కారణాంకం)
- కాబట్టి కనిష్ట కారణాంకము కనుగొనవలసిన అవసరం లేదు. కాని గరిష్ట సామాన్య కారణాంకంలు వేరు, వేరుగా ఉంటాయి. గరిష్ట సామాన్య కారణాంకం కనుగొనుటకు పద్దతులు.

  1. కారణాంకముల పద్ధతి

  2 ప్రధాన కారణాంకముల పద్ధతి

  3. భాగహార పద్దతి (యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి)

క.సా.గు (L.C.M.)

- ఒక సంఖ్యకు వ్యవస్థితం మయ్యే గుణిజాలు అనంతం
- రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ సంఖ్యలకు వ్యవస్థితమయ్యె సామాన్య గుణిజంలు అనంతం, కాబట్టి గరిష్ట సామాన్య గుణిజంను కనుగొనలేము.
- కనిష్ట సామాన్య గుణిజంను కనుగొనవచ్చును.

కనిష్ట సామాన్య గుణిజంను కనుగొను పద్ధతులు

1. ప్రధాన కారణాంకల పద్దతి
2. సంక్షిప్త భాగహార పద్దతి

పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు (సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు) : రెండు సంఖ్యలకు 1 తప్పా వేరే సామాన్య కారణాంకం లేకపోతే ఆ సంఖ్యలను "పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు" అంటారు.

- ఏ రెండు వరుస సహజ సంఖ్యలయిన పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు అవుతాయి.
- ఏ రెండు వరుస బేసిసంఖ్యలయినా పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు అవుతాయి.
- రెండు సంఖ్యలు పరస్పర ప్రధానసంఖ్యలు అయితే వాటి లబ్దంమే వాటి క.సా.గు.
- రెండు సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య, రెండవ దాని గుణిజం అయితే గుణిజ సంఖ్యయే వాటి క.సా.గు.
- రెండు సంఖ్యలలో ఒకటి రెండవదాని కారణాంకము అయితే ఆ కారణాంకమే గ.సా.భా.

పరిపూర్ణ సంఖ్యలు : ఒక సంఖ్య యొక్క కారణాంకములు మొత్తం ఆ సంఖ్యకు రెట్టింపు అయితే ఆ సంఖ్యను "పరిపూర్ణ సంఖ్య" అని అంటారు.

ఉదా: 6, 28, 496, 8128, 33550336, ...

సంయుక్త సంఖ్యలు : ఒకటి, మరియు ఆ సంఖ్య మాత్రమే కాకుండా వేరే సంఖ్యలు కారణాంకాలుగా వ్యవస్థితము అయితే ఆ సంఖ్యను సంయుక్త సంఖ్య లేదా విభాజ్య సంఖ్యలు లేదా గుణిజ సంఖ్య అని అంటారు.

- సంయుక్త సంఖ్యకు గల ధనపూర్ణ కారణాంకాల సంఖ్య ఎంత?

పూర్ణ సంఖ్యలు : పూర్ణాంకముల సమితికి రుణ పూర్ణ సంఖ్యలను కలుపగా ఏర్పడు సంఖ్యాసమితిని "పూర్ణసంఖ్యలు" అని అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల భాషలో "Integers".

- 0 రుణ సంఖ్య కాదు. ధన సంఖ్య కాదు.

I లేదా $Z = \{..... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... \}$ Z అనే అక్షరము Zahlen అనే జర్మన్ పదం నుండి తీసుకోబడింది.

Zahlen అనగా "German" భాషలో సంఖ్య అని అర్థం.

- ఋణసంఖ్యలు $I^- = Z^- = \{........ -4, -3, -2, -1\}$
- ధన పూర్ణసంఖ్యలు $I^+ = Z^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

0 రుణ పూర్ణసంఖ్యల సమితిని, ధనపూర్ణసంఖ్యల సమితిని వేరుచేస్తుంది.

$$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$$

పరమమూల్యం : ఒక సంఖ్యకు, ధన సంఖ్యయైన లేదా ఋణ సంఖ్యయైన దాని యొక్క ధనవిలువలను ఆ సంఖ్య యొక్క పరమ విలువ అంటారు. సంఖ్యారేఖపై గల రెండు బిందువుల మధ్యదూరము ఆ సంఖ్యల భేదము యొక్క పరమమూల్యం లేదా పరమవిలవ అంటారు. '$| \;|$' తో సూచిస్తారు.

$\therefore \quad |X| = |-X|$ కాని $\quad X \neq -X$

$$|X| = \begin{cases} X; X \geq 0 \\ -X; X < 0 \end{cases}$$

• $|X| = \max\{-X, X\}$ అవుతుందా?

సామాన్య భిన్నంలు : ఒక వస్తువును చేసిన సమానభాగాలను సూచించే సంఖ్యను"హారం" అని అంటారు. అలాంటి సమాన భాగాలను ఎన్నింటిని తీసుకొంటున్నామో సూచించే దానిని "లవం" అంటారు. సామాన్య భిన్నంను $\frac{\text{లవం}}{\text{హారం}}$ అని వ్రాసి, లవం భిన్నం హారం అని చదువుతాం.

ఒక వస్తువులో చేయబడిన సమానభాగాల నుండి ఎన్నుకోబడిన భాగములకు, చేయబడిన సమానభాగముల మధ్యగల నిష్పత్తిని భిన్నంగా భావిస్తారు.

ఏకాంశ భిన్నాలు :- లవం 1గా గల భిన్నాలను ఏకాంశ భిన్నంలు అంటారు.

ఉదా: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$......

[ఏకాంశ భిన్నాలలో హారము పెద్దదిగా గల భిన్నము విలువ, హారము చిన్నదిగా గల భిన్న విలువకన్న తక్కువ.]

- హారములు సమానంగా ఉన్నప్పుడు లవము పెద్దదిగా గల భిన్నము పెద్దది అగును.

- $\frac{1}{1}$ ఏకాంశ భిన్నం అవుతుందా?

సామాన్యభిన్నాలు

క్రమభిన్నం | అపక్రమభిన్నం | మిశ్రమభిన్నం

- సజాతి భిన్నాలకు మాత్రమే సంకలన, వ్యవకలన ప్రక్రియలు సాధ్యమవుతుంది? ఎందుకు ?
- లవ, హారంలు సమానంగా ఉండే భిన్నాలు ఏరకమైన భిన్నాలంటారు?
- ఒక భిన్నానికి ఎన్ని సమాన భిన్నాలు వ్యవస్థితమవుతాయి?

వాస్తవసంఖ్యలు

కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యల సమ్మేళనంను వాస్తవసంఖ్యాసమితి అంటారు. దీనిని Rతో సూచిస్తారు.

$$\boxed{\therefore\ \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'}$$

వర్గమూలం

ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే గుణించగా వచ్చె లబ్దంను సంఖ్య యొక్క వర్గం అని అంటారు. ఈ వర్గం రావడానికి కారణమైన సంఖ్యను ఆ సంఖ్యకు "వర్గమూలం" అంటారు.

- $a \times a = a^2$ కావున a^2 యొక్క వర్గమూలము a
- $(-a)\times(-a) = a^2$,, ,, ,, $-a$

$\left\{\begin{array}{l} a \text{ యొక్క వర్గమూలము } a^2 \\ a^2 \text{ యొక్క వర్గమూలము } a \end{array}\right\}$

నోట్ :

1. సాధారణంగా $\sqrt{\ }$ గుర్తు వాడినప్పుడు ధనమూలమును మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసికొంటారు. దానిని ప్రధానమూలం అంటారు.

   $\boxed{* \quad \sqrt{a^2} = a}$

2. సాధారణంగా వర్గమూలం కనుగొనడానికి పునరావృత వ్యవకలనం, భాగహార పద్ధతి, ఊహపద్ధతులను ఉపయోగిస్తారు.
3. ప్రతి వాస్తవసంఖ్యను అంతమయ్యే, ఆవర్తనమయ్యే, అంతంకాని, ఆవర్తనంగాని దశాంశ రూపంలో రాయవచ్చును.

ఋణ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలం వాస్తవసంఖ్యా సమితికి చెందుతుందా? ఎందుకు?

దశాంశభిన్నాలు : హారం 10^p, $p \in N$ కలిగిన భిన్నాలను "దశాంశ భిన్నాలు" అని అంటారు.

ఆలోచించండి.

- ప్రతి సామాన్యభిన్నంను దశాంశ రూపంలో రాయవచ్చా? రాయగల్గితే దశాంశ భిన్నాల రకాలను తెలపండి?
- ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశరూపంలో రాయవచ్చా?
- శతాంశ భిన్నంను ఏ పేరుతో పిలుస్తారు? ఎందుకు?

అకరణీయ సంఖ్యలు : p, q లు పూర్ణసంఖ్యలయి $q \neq 0$ అయినపుడు $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగిన సంఖ్యలను "అకరణీయ సంఖ్యలు" అని అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల భాషలో "Rational numbers" అని అంటారు.

$$\boxed{Q = \left\{ x : x = \frac{p}{q},\ q \neq 0, \forall p, q \in z \right\}}$$

నోట్ : $q = 0$ అయితే $\frac{p}{q}$ నిర్వచించబడదు. ఎందుకనగా సున్నాతో భాగహారం నిర్వచించబడలేదు.

ఒక కాగితమును వృత్తాకారంగా కత్తిరించి, 2, 3, 4, 5, 6 సమాన భాగంలుగా మడచి మీ స్వీయ ప్రతిస్పందనలు తెల్పండి?

కరణీయ సంఖ్యాసమితి

ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను అంతమయ్యే దశాంశము లేదా ఆవర్తనం మయ్యే దశాంశ రూపంలో రాయవచ్చును.

అకరణీయ సంఖ్యకాని వాస్తవ సంఖ్యను కరణీయ సంఖ్య అంటారు.

- కరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖలపై సూచించగలము.

ఉదా: 1. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots\ldots.$

2. $1.14114111411114\ldots$

- అన్ని కరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించవచ్చా? ఎలా?
- కరణీయ సంఖ్యలను క్రమాభివృద్ధి పద్దతిలో సూచించగలం ఎలా?

కల్పిత సంఖ్యలు

$x^2 = -1$ యొక్క సాధనలో x విలువ $\sqrt{-1}$ గా వచ్చును. ఋణసంఖ్యల వర్గమూల సంఖ్య వాస్తవ సంఖ్యాసమితిలో వ్యవస్థిముకాదు.

- $\sqrt{-1} = i$ అనుకొంటే $-1 = i^2$ అవుతుంది, కాబట్టి i ని కల్పిత సంఖ్య అని అంటారు. ఈ కల్పిత సంఖ్యల సమితిని C తో సూచిస్తారు

$C = \{x : x = a + ib,\ a, b, \in R,\ i^2 = -1\}$

- కల్పిత సంఖ్యలలో త్రిధాత్వ ధర్మం (Law of trichotemy) వర్తించదు.

సంఖ్యాధర్మాలు

ధర్మం/ సంఖ్యాసమితి	N	W	Z	Q	R	C
A_1 సంకలన సంవృత	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A_2 సంకలన సహచర	✓	✓	✓	✓	✓	✓
A_3 సంకలన తత్సమ	×	✓	✓	✓	✓	✓
A_4 సంకలన విలోమ	×	×	✓	✓	✓	✓
A_5 సంకలన వినిమయ	✓	✓	✓	✓	✓	✓
M_1 గుణకార సంవృత	✓	✓	✓	✓	✓	✓
M_2 గుణకార సహచర	✓	✓	✓	✓	✓	✓
M_3 గుణకార తత్సమ	✓	✓	✓	✓	✓	✓
M_4 గుణకారవిలోమ	×	×	×	×	×	×
				$\mathbb{Q}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{C}-\{0\}$
				✓	✓	✓
M_5 గుణకారవినిమయ	✓	✓	✓	✓	✓	✓

నోట్ : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ లలో '0'కు గుణకార విలోమము వ్యవస్థితం కాదు కాని $\mathbb{Q}-\{0\}$ $\mathbb{R}-\{0\}$ $\mathbb{C}-\{0\}$ సమితులలోని మూలకాలకు గుణకార విలోమాలు వ్యవస్థితం అవుతుంది.

కృత్యం

ఆరు – ప్రధాన సంఖ్యలు

సహజ సంఖ్యలను 1 నుండి మొదలుపెట్టి 6వరకు మొదటి వరుసలోను 7 నుండి మొదలుపెట్టి 12వరకు రెండు వరుసలలో ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయాలి.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

పై పట్టిక నుండి 7వరకు గల ప్రధాన సంఖ్యలను ఒక వరుసలో వ్రాసి 5 మరియు 7లకు ప్రతిసారి '6' కలిపిన వచ్చు సంఖ్యలలో 5, 7 యొక్క గుణిజాలను తీసివేసిన వచ్చు ప్రధాన సంఖ్యలను పరిశీలించినప్పుడు మీరు ఏమి గమనించారు.

2,	3,	5,	7	35	37	77	79
		11	13	41	43	83	85
		17	19	47	49	89	91
		23	25	53	55	95	97
		29	31	59	61	.	.
				65	67	.	.
				71	73	.	.

వీటి నుండి కవల ప్రధాన సంఖ్యలను సులభంగా గుర్తించవచ్చును.

ప్రధాన సంఖ్యలు :– 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97

కవల ప్రధాన సంఖ్యలు : (3, 5), (5, 7), (11, 13) (17, 19), (29, 31), (41, 43) (59, 61) (71, 73), (89, 91)

సంఖ్యా వ్యవస్థ

$\mathbb{C}$ – కల్పిత సంఖ్యాసమితులు

$\mathbb{R}$ (వాస్తవ సంఖ్యలు) కల్పిత సంఖ్యలు

$\mathbb{Q}$ (అకరణీయ సంఖ్యలు) కరణీయ సంఖ్యలు

$\mathbb{Z}$ (పూర్ణ సంఖ్యలు) సామాన్య భిన్నాలు

W (పూర్ణాంక సంఖ్యలు) ఋణపూర్ణసంఖ్యలు

N (సహజ సంఖ్యలు) '0'(zero)

$$\boxed{N \subset W \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{Q}'}$$

భాగహారశేషవిధి (Division algorithm)

a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు, $b > 0$ అయితే $a = bq + r$ మరియు $0 \le r < b$ అయ్యేటట్లు "q" మరియు "r" అనే ఏకైక పూర్ణసంఖ్యలు వ్యవస్థితం అవుతాయి.

'a' వస్తువులను 'b' మందికి విభజించినపుడు ఒక్కొక్కరికి 'q' చొప్పున వస్తూ 'r' వస్తువులు మిగిలిపోతాయి $(a > b)$ r విలువ b కన్నా తక్కువగా ఉంటాయి. లేదా "0" కూడ కావచ్చు. దీనిలో భాగఫలంను q తోను మరియు శేషంను "r" చే సూచిస్తాము.

1) ఈ క్రింది (a, b) జతలు $a = bq + r$ రూపంలో రాయండి.

i) $a = 17,\ b = 6$ ii) $a = 1750 \quad b = 25$

2) $a = 1750 \quad b = 25$ అయినపుడు r విలువ ఎంత అవుతుంది ? దీని నుండి మీరు ఏమి గమనించారు?

$r = 0$ అయితే $a = bq$ అవుతుంది "b"ని "a"యొక్క భాజకం అని అంటారు. అనగా "b" అనే సంఖ్య "a" ని నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది అని అర్థం. దీనిని $b \mid a$ అని వ్రాస్తారు.

a మరియు b లు ధన పూర్ణసంఖ్యలు మరియు a, శూన్యేతరాలు 'g' అనునది a, b ల గసాభా $\Leftrightarrow$ (i) 'g', a, b ల సామాన్య భాజకము (2) 'g', a, bల అన్ని సామాన్య భాజకములచే భాగింపబడును. మరియు $g = (a, b)$ గా వ్రాయుదురు.

కొలతలు గుర్తించబడని రెండు కొయ్యబద్దల యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య మాపకము కనుగొనవలసి వచ్చినపుడు

(i) ఆ కొయ్య బద్దల పొడవులు 52 మరియు 14 యూనిట్లు అనుకొనుము. మనకు కొలత బద్దలేదు, కొలతలు గుర్తించని రెండు కొయ్యబద్దలు మాత్రమే కలవు. ఈ పరిస్థితులలో మనము పొడుగైన బద్దని పొట్టి బద్దతో కలుపు ప్రయత్నించుము. 52 యూనిట్ల బద్దను 14 యూనిట్ల బద్ద కొలిచిన మూడు మాపనముల తరువాత 10 యూనిట్లు మిగిలిపోవును. ఇప్పుడు ఈ 10 యూనిట్ల బద్దలో 14 యూనిట్ల బద్దను కొలిచెను.

14 యూనిట్ల బద్దను 10 యూనిట్లలో కొలచిన ఒక మాపనము తరువాత 4 యూనిట్ల బద్ద మిగిలిపోవును.

తిరిగి 4 యూనిట్ల బద్దలో 10 యూనిట్ల బద్దను కొలిచిన రెండు మాపనముల తరువాత 2 యూనిట్ల బద్ద మిగులును.

ఈ 2 యూనిట్ బద్దలో 4 యూనిట్ల బద్దను రెండు సార్లకు శేషము లేకుండా మాపనము చేయును. ఈ 2యే 52, 14ల గ.సా.భా. దానిలో 52ను $52 = 2 \times 26$ మరియు 14 ను $14 = 2 \times 7$లుగా వ్రాయవచ్చును. వీటిని 2 మాపనములలో తప్ప 3, 5 ల మాపనములలో వ్రాయాలి.

ఈ ప్రణాళిక 54 మరియు 14లనే కాక రెండు సంఖ్యలు a మరియు b లకు పనిచేయాలి.

యూక్లిడ్ విశేషనిధి

a, b లు రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు వాటి గ.సా.భా (a, b)ని పరిమిత సోపానములలో a మరియు b ల రేఖీయ సంయోగము $(a, b) = ra + sb$ గా వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ r మరియు s లు పూర్ణసంఖ్యలు

$52 = 14 \times 3 + 10$ (1)

$14 = 10 \times 1 + 4$ (2)

$10 = 4 \times 2 + 2$ (3)

$4 = 2 \times 2 + 0$ (4)

(4) నుండి 2/4 (4 ను 2 నిశ్శేషంగా భాగించును)

(3) నుండి $2/10 = 2(2 \times 2 + 1)$

(2) నుండి $2/14 = 2(5 \times 1 + 2)$

(1) నుండి $2/52 = 2(7 \times 3 + 5)$

కావున '2' అనునది 54 మరియు 14ల సామాన్య భాజక మరియు దీనిని

$2 = 10-4 \times 2$ (3)

$4 = 14 - 10 \times 2$ (2)

$2 = 10-(14 - 10\times1)2$

$10 = 52 - 14\times3$

$2 = (52 - 14\times3) - (14-10\times1)2 = 3(52) + (-1)(14)$

1. దిగువ సమితుల గొలుసుల వ్రాయబడిన నియమము తెల్పుము.

$\{57, 37\} \rightarrow$

$\{98,175\} \rightarrow$

2. పై సమితుల గొలుసులను రేఖీయ సమ్మేళనముగా రాయండి.

57 = 57 + 36

36 = 57 + 36

21 = ,,

15 = ,,

6 = ,,

9 = ,,

3 = ,,

3. పై సమితుల గొలుసుల సోపానంలో దిగువ విధంగా వ్రాసిన

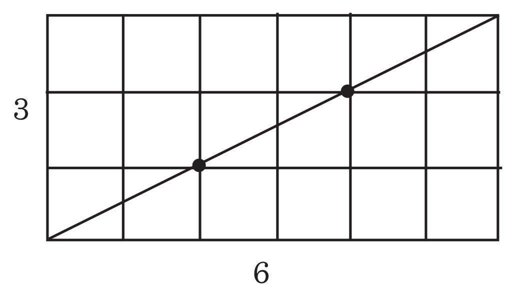
$\{57, 37\} \rightarrow$

$\{175, 98\} \rightarrow$

అది యూక్లిడ్ విశేషవిధి

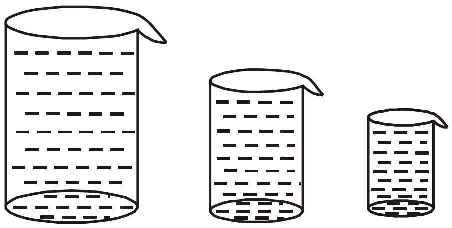
4. గసాభా కనుగొనవలసిన రెండు సంఖ్యలు పొడవు మరియు వెడల్పుగా తీసుకోని గళ్ళకాగితము దీర్ఘచతురస్రము నిర్మించుము. దీర్ఘచతురస్రపు కర్ణం, గళ్ళ యొక్క ఎన్ని మూలల గుండా పోవు చున్నది. గమనించి వానితో ఆకర్ణము ఎన్ని భాగాలుగా విభజింపబడ్తుందో, ఆ భాగాల సంఖ్యే వాటి గ.సా.భా. అగును. మరియు ఈ బిందువులతో, దీర్ఘచతురస్ర భుజాలలో అన్ని సరూప త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి.

(ఈ సందర్భములో 2 బిందువులు 3 భాగాలు; 3 సరూప త్రిభుజాలు).



5. 8 లీటర్ల జార్‌లో నిండుగా నీరు కలదు. దీనిని 5 లీటర్ల నుండి 3 లీటర్ల ఖాళీ జార్‌లతో 4లీ, 4లీగా విభజించుట.

సాధన: అంటే 5 లీ ఖాళీ జార్ మరియు 3 లీటర్ల జార్‌తో 4 లీటర్ల కలవాలి గణిత బాషలో 4ను 5 మరియు 3ల రేఖీయ సంయోగంగా రాయవలెనంటే $4 = 5x + 3y$ గా రాసి x మరియు y ల విలువలను కనుగొనాలి దానికి యూక్లిడ్ గసాభా పద్ధతి ఉపయోగించాలి.



8 5 3

$\{5,3\} \rightarrow \{2,3\} \rightarrow \{2,1\} \rightarrow \{1,1\}$

$5 = 5(1) + 3(0)$

$3 = 5(0) + 3(1)$

$2 = 5(1) + 3(-1) \Rightarrow 4 = 5(2) + 3(-2)$

$1 = 5(-1) + 3(2)$ అంటే 5 లీటర్ల జారును 2 సార్లు పూర్తి నింపాలి, 3 లీటర్ల జారుకు 2 సార్లు ఖాళీ చేయాలి.

సోపానాలు గమనించండి.

	8	5	3
	8	0	0
Step 1	3	5	0
Step 2	3	2	3
Step 3	6	2	0
Step 4	6	0	2
Step 5	1	5	2
Step 6	1	4	3
Step 7	4	4	0

ఆలోచించండి

Ex : ఒక బహుళ 66 అంతస్తుల భవనంలో గల లిఫ్ట్‌లో రెండే రెండు బటన్‌లు కలవు. (D), (U). (D) మీటను నొక్కిన లిఫ్ట్ 11 అంతస్తులు క్రిందకు, (U) మిటను నొక్కిన అది 8 అంతస్తులు క్రిందకు, (U) మీటను నొక్కిన అది 8 అంతస్తులు పైకి వెళ్ళిన మనము వీటిని ఉపయోగించిన అంతస్తులో పైన చేరుకోగలము. (E_2) భవనములో 20 అంతస్తులే ఉన్న సాధ్యమేనా?

గ.సా.కా (GCD)

a, b లు ఏవేని రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $a > b$ అనుకొనుము.

యూక్లిడ్ భాగాహార విశేష విధి నుండి (Euclid Lemma) ఆధారంగా

$a = bq + r$ గా వ్రాయవచ్చు.

$0 \leq r < b$

దీనిని వాక్యరూపంలో వివరిస్తే 'a' ని b చే భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలము q, శేషము r అగును, r విలువ 0 మరియు b ల మధ్య ఉండును. 'a' ని b చే భాగిస్తే భాగఫలము q_1, శేషము r_1 అనుకొనుము.

$a = bq_1 + r_1$; $0 \leq r_1 < b$

[$r_1 < b$ కావున]

$b = r_1q_2 + r_2$ గా వ్రాయవచ్చు

[$r_2 < r_1$ కావున]

$r_1 = r_2q_3 + r_3$

$r_2 = r_3q_3 + q_4$

....

$r_1 < b$; $r_2 < r_1$; $r_3 < r_2$ ....

$b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ .... ఇవి అన్నీ

ధన పూర్ణ సంఖ్యలు కావున ఈ శ్రేఢి '0'తో అంతమగును.

$r_n = 0$ అయిన సందర్భంలో r_{n-1}; లను a, b రెండింటి కారణాంకము అగును.

$a = bq_1 + r_1$

$b = r_1q_2 + r_2$

$r_1 = r_2q_3 + r_3$

$r_3 = r_3q_4 + r_4$

....

$r_4 = 0$ అనుకొనుము.

$r_2 = r_3q_4$ అగును.

అనుకొనుము.

$r_1 = r_2q_3 + r_3$

$= (r_3\ q_4 + r_4)q_3 + r_3$

$= r_3(q_4q_3 + r_4q_3 + r_3)$

$= r_3q_4q_3 + r_3 + r_3(q_4q_3 + 1)$

$b = r_1q_2 + r_2$

$= r_3(q_4q_3 + 1)q_2 + r_2$

$= r_3q_4q_3q_2 + r_3q_2 + r_3q_4$

$= r_3(q_4q_3q_2 + q_2 + q_4) = r_3$ K అనుకొనుము.

$a = bq_1 + r_1$

$= r_3(q_4q_3q_2 + q_2 + q_4)q_1 + (r_2q_3 + r_3)$

$= r_3(q_4q_3q_2 + q_2 + q_4)q_1 + r_3q_4 + r_3$

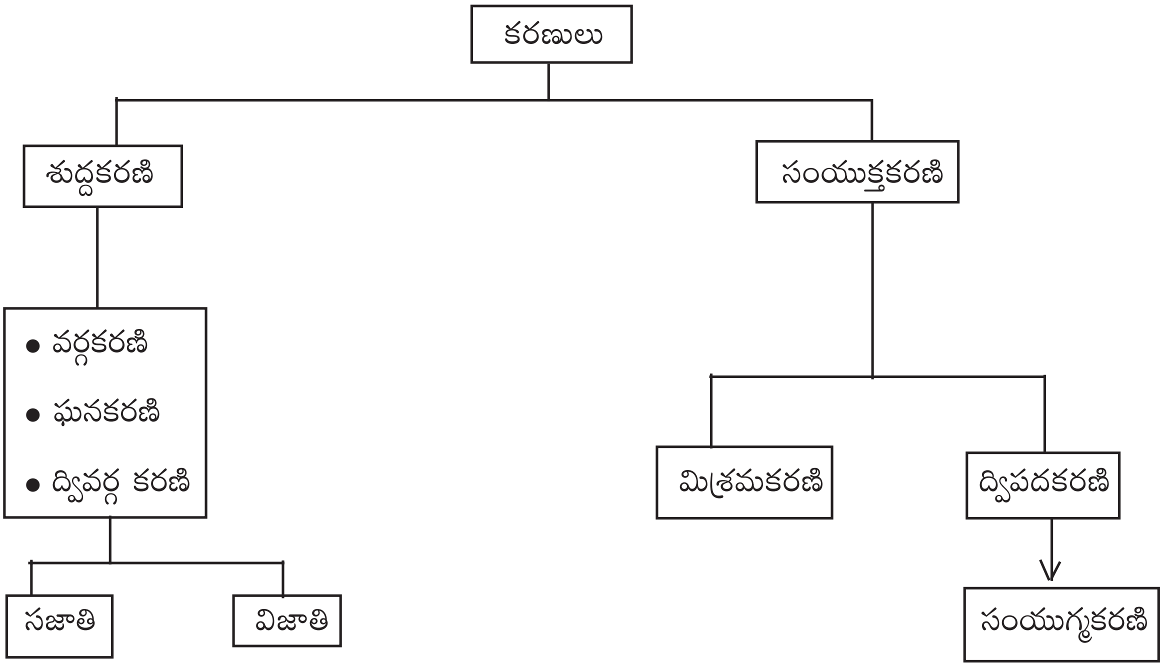
$= r_3[l]$

a, b లు r_3 యొక్క గుణిజాలు

$\therefore a, b$ లకు r_3 సామాన్య గుణిజం.

నోట్ : ఏ చివరి విభాజముతో భాగించిన శేషము ‘0’ వచ్చునో ఆ సంఖ్య వాటి గ.సా.భా. అగును.

కరణులు



కరణి (Surd) : a ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య, n ఒక పూర్ణసంఖ్య అయితే $\sqrt[n]{a}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య కాకపోతే, $\sqrt[n]{a}$ ను n వ పరిమాణ కరణి అంటారు.

- ప్రతి కరణీయ సంఖ్య కరణి అవుతుందా?
- రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం ఏ సంఖ్య అవుతుంది?
- రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య అవుతుందా?
- రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య అయితే వాటిని ఒకదాని, ఒకటి ఏమంటారు?

ఒక ద్విపది కరణి యొక్క వర్గమూలంను కనుగొనుట :

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy}$ అని మనకు తెలుసు. కావున విపర్యయంగా

$\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})$ అవుతుంది.

నోట్ : $\therefore$ అదే విధంగా $\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}\,(x>y)$ అని గమనించవచ్చును.

$x+y=a,\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{b};$ ఇచ్చట $a, b \in Q^+$ అనుకొనుము. అప్పుడు

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ రూపంలో వ్యవస్థితం అవుతుంది.

- $a \pm \sqrt{b}$ రూపంలో కొన్ని ద్విపదులను వ్రాసి వాటి వర్గమూలాలంలను గణించండి.

$a \pm \sqrt{b}$ రూపంలో ఉండే ద్విపద కరణుల ఘనమూలం కనుగొనుట :

$$(x+\sqrt{y})^3 = x^3 + (\sqrt{y})^3 + 3x\sqrt{y}\,(x+\sqrt{y})$$

$$= x^3 + y\sqrt{y} + 3x^2\sqrt{y} + 3xy$$

$= (x^3+3xy)+(y+3x^2)\sqrt{y}$ అని మనకు తెలుసూ

అదేవిధంగా $(x-\sqrt{y})^3 = (x^3+3xy)-(y+3x^2)\sqrt{y}$ అని గమనించవచ్చును.

$x^3+3xy=a;\ (y+3x^2)\sqrt{y}=\sqrt{b};$ ఇచ్చట $a, b \in Q^+$ అనుకొనుము.

$(x \pm \sqrt{y})^3 = a \pm \sqrt{b}$ రూపంలో ఉంటుందని గమనించవచ్చును. విపర్యయంగా

$\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} = x \pm \sqrt{y}$ అవుతుంది.

అదే విధంగా $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3 = x\sqrt{x}+3y\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+y\sqrt{y}$

$= (x+3y)\sqrt{x} + (3x+y)\sqrt{y}$ అవుతుందని మనకు తెలుసూ!

$(x+3y)\sqrt{x}=\sqrt{a}$ మరియు $(3x+y)\sqrt{y}=\sqrt{b}$ అనుకొంటే $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3 = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ అవుతుందని గమనించవచ్చును. విపర్యయంగా $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ అవుతుంది. $\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$ రూపంలో వ్యవస్థితం అవుతుందని గమనించవచ్చును. మరింత విస్తృత అవగాహన కొరకు కరణులకు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

$7+5\sqrt{2}$ యొక్క ఘనమూలం కనుగొనుట.

సాధన : $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = a+\sqrt{b}$ అనుకొను.

ఇరువైపుల ఘనం చేయగా

$$7+5\sqrt{2}=(a^3+3ab)+(b+3a^2)\sqrt{b}$$

ఇరువైపుల అకరణీయ, కరణీయ భాగములు పోల్చగా

$a^3 + 3ab = 7$ ...(1)

$(b+3a^2)\sqrt{b} = 5\sqrt{2}$ ...(2)

$b+3a^2 = 5$ $\quad b = 2$

$3a^2 = 3$

$a^2 = 1$

$a = 1$

$$\therefore \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

అదేవిధంగా $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$ అని గమనించవచ్చును.

- $7+5\sqrt{2}$ యొక్క ఘనమూలం కనుగొనుటకు మరొక పద్ధతిని సూచించగలరా ?
- $a+\sqrt{b}$ అనే కరణిని సంయుగ్మ కరణి అని పిలవడానికి కారణాలు తెల్పండి.
- $x=\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$ అయితే $x^2(x-14)^2=1$ అని చూపండి.
- $2^{\frac{1}{3}} \pm 3^{\frac{1}{3}}$ యొక్క అకరణీయ కారణాంకములను తెల్పండి.
- $2^{\frac{1}{3}} \pm 3^{\frac{1}{5}}$ లకు అకరణీయ కారణాంకములు వ్యవస్థితము అవుతాయా ?

$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x^2-3}+\left(5-2\sqrt{6}\right)^{x^2-3}=10$ ను సాధించుట

సాధన : $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x^2-3}=\text{K}$ అనుకొనుము

$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{x^2-3}=\dfrac{1}{\text{K}}$ అవుతుంది. $\qquad$ ఇచ్చట $5-2\sqrt{6}=\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow K + \frac{1}{K} = 10$$

$$K^2 - 10K + 1 = 0$$

$$K = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$= \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

సందర్భం(i):- $K = 5+2\sqrt{6}$

$$(5+2\sqrt{6})^{x^2-3} = (5+2\sqrt{6})^1$$

$$x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

సందర్భం (ii) $K = 5-2\sqrt{6}$

$$(5+2\sqrt{6})^{x^2-3} = (5+2\sqrt{6})^{-1}$$

$$x^2 - 3 = -1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \left\{\pm 2, \pm\sqrt{2}\right\}$$

- $p(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 5x + 2$ అయితే $p(2+\sqrt{3})$ యొక్క విలువను గణించండి.
- $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+.....\infty}}}$ విలువను కనుగొనలమా? (ఇచ్చుట $a > 0$)
- $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a.....n \text{ పదాలు}}}}$ విలువను కనుగొనగలమా? (ఇచ్చుట$a > 0$)

సంవర్గమానాలు

అనుకూల పరిస్థితులలో ఇ.కోలి బ్యాక్టీరియా సుమారుగా ప్రతీ 30 నిమిషములకొకసారి సమవిభజన జరిగి రెండుగా విచ్ఛిత్తి చెందుతుంది. 30 నిముషాలను ఒక యూనిట్‌గా ఎంచుకొని బాక్టీరియా సమవిభజనను పరిశీలించినారు. ఐతే తాను మొదటగా పరిశీలించిన సమయాన్ని 0గా భావించి 0ను ని॥ల నుంచి తరువాత 30 ని॥ల వరకు 1 యూనిట్‌గా తీసుకొని, ప్రతీ ఒక్కొక్క యూనిట్‌కు ఎంత బాక్టీరియా పెరిగిందో మొత్తాన్ని పట్టికలో పొందుపరిచినారు. పరిశీలించండి. దీని కాలపరిమితిని 1 యూనిట్‌గా తీసుకొని పట్టిక రూపంలో రాయగా అది ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.

కాలపరిమితి (యూనిట్లు)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	..... అంకశ్రేఢి
బాక్టీరియా సంఖ్య	1	2	4	8	16	32	64	128	256	.... గుణశ్రేఢి

యూనిట్‌లలో కాలపరిమితిని 0 నుంచి మొదలు పెట్టినట్లే 0 సమయం ఉన్న బాక్టీరియాను 1 యూనిట్‌గా భావించారు. 0×30 ని॥లలో 1 యూనిట్, 1×30 నిమిషాలతో సమవిభజన జరిగి రెండుగా విచ్ఛిత్తి అవడం వల్ల $1\times2=2$; 2×30 నిముషాలలో 2 యూనిట్లు సమవిభజన జరిగి $2\times2=4$ యూనిట్లు. .... పెరుగుతున్నట్లుగా గమనించవచ్చును. పై రెండు సంఖ్యల పరంపరను చూస్తే ఏ శ్రేఢులని గుర్తించవచ్చును !

వీటిని మనము పరిశీలించినట్లయితే కాలపరిమితి అంకశ్రేఢిలోను $a = 0$, $d = 1$ మరియు బాక్టీరియా సంఖ్య గుణశ్రేఢిలోను $a = 1$, $r = 2$ వున్నాయి.

కాని కాలపరిమితికి, బాక్టీరియా సంఖ్యకు ఏవిధమైన సంబంధము ఉంది? ఆ రెండు అనులోమ చరత్వాన్ని కలిగి వున్నాయి కాని అనులోమాను పాతంలో లేవు అనగా రెండు చరరాశుల విలువలు పెరుగుతున్నాయి. కాని ఇది ఒకే నిష్పత్తిలో జరగడంలేదు. మరి వీటి సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేయడం ఎలా ?

జాన్ నేపియర్ వీటి మధ్య ఒక అద్భుతమైన సంబంధాన్ని ఆవిష్కరించాడు. బాక్టీరియా సంఖ్యలోని ఏవైనా రెండు సంఖ్యలను తీసుకొందాం. ఉదాహరణకు 4 మరియు 32. $4 \times 32 = 128$. ఇప్పుడు కాలపరిమితిలోని సంబంధిత సంఖ్యలను పరిశీలించండి. అవి 2, 5 మరియు $2 + 5 = 7$.

ఇక్కడ రెండవ శ్రేఢిలోని పదాల గుణకారం మొదటి శ్రేఢిలోని సంబంధిత పదాల సంకలనల కావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. దీనిని విపర్యయంగా మొదటి శ్రేడినుండి మనం గమనించవచ్చు. దీనికి విపర్యయంగా మొదటి శ్రేఢి నుండి $4 + 1 = 5$ అయిన రెండవ శ్రేఢిలో సంబంధిత పదాలు $16 \times 2 = 32$ అవుతుంది. దీని నుండి మనము గుణకారం చేయాలనుకోకపోతే పట్టిక నుండి సంబంధిత పదాల కూడిక ద్వారా ఆవిలువను రాబట్టవచ్చును.

అలాగే $6 + 2 = 8$ అయిన $64 \times 4 = 256$

పై ఉదాహరణను పరిశీలిస్తే

కాలపరిమితి (యూనిట్లు)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
బాక్టీరియా సంఖ్య	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...
వీటిని	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	.....

మొదటి శ్రేఢిలోని సంఖ్యలను, రెండవ శ్రేఢిలోని సంబంధిత సంఖ్యల సంవర్గమానంగా చెప్పవచ్చును. విపర్యయంగా రెండవ శ్రేఢిలోని సంఖ్యలను, మొదటి శ్రేఢిలోని సంబంధిత సంఖ్యల ఘాతలుగా గల సంఖ్యలుగా చెప్పవచ్చును.

సంవర్గమాన సంఖ్యలు	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
ఘాత సంఖ్యలు	1	2	4	8	16	32	64	128	256	....
	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	.....

కాలపరిమితి 'a' అయిన బాక్టీరియా సంఖ్య 2^a అని గుర్తించవచ్చును. $n = 2^a$ దీనిలో 'n' ఘాత సంఖ్య అవుతుంది.

$n = 2^a$ అయిన 'n' అయిన n యొక్క సంవర్గమాన సంఖ్య 'a'

'a' ఘాతంగా గల సంఖ్య $2^a = n$

ఉదాహరణకు $2^5 = 32$

32 యొక్క సంవర్గమాన సంఖ్య 5 (2 భూమికి)

2 యొక్క 5వ ఘాత సంఖ్య 32.

$$\left.\begin{array}{l} 2^5 = 32 \\ \sqrt[5]{32} = 2 \\ \log_2 32 = 5 \end{array}\right\}$$

ఇందాకటి ఉదాహరణ ఆధారము 2గా గల సంఖ్యలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది. ఇప్పుడు మనం అదేభావనను 10 ఆధారంగా గల సంఖ్యలకు విస్తరించి అర్థం చేసుకొందాం.

సంఖ్య(n)	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	
	1	10	100	1000	10000.......	
సంవర్గమానం	0	1	2	3	4	.....

మరల మనం మొదటి గుణశ్రేఢిని తరువాత సంబంధిత అంకశ్రేఢిని గమనించవచ్చును.

$$n = 10^x$$

n యొక్క సంవర్గమానం 'x' (10వ ఆధారానికి)

ఉదాహరణకు $10^4 = 10000$

10000 సంవర్గమానం 4 (10వ ఘాతానికి)

మనము 100 మరియు 1000లను గుణించాలంటే వాటి సంవర్గమానాలు 2 మరియు 3లను కలపాలి. 2 + 3 = 5. మరియు సంవర్గమానం 5 యొక్క సంబంధిత సంఖ్య $10^5 = 100000$ వాటి లబ్దమవుతుంది.

$100 \times 1000 = 100000$

మనము 1, 10, 100 .... వంటి సంఖ్యలను తీసుకొన్నప్పుడు మరివాటి మధ్యగల సంఖ్యల లబ్ధాన్ని కనుగొనడం ఎలా?

ఉదాహరణ : 2×3

సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
సంవర్గమానం	0	–	–	–	–	–	–	–	–	1

ఇక్కడ ఖాళీలలో వున్న సంఖ్యలు 0 మరియు 1 మధ్య వుండడాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

సంఖ్య	1	2	3	4	6	9	10
సంవర్గమానం	0	0.3010	0.477	0.602	0.778	0.955	1

ఇప్పుడు 2×3 అనేది 0.301 మరియు 0.477ల మొత్తం 0.778 ఇది సంఖ్య 6 యొక్క సంవర్గమాన విలువ.

$\therefore \log 6 = \log 2 + \log 3$ అని మనం అర్థం చేసుకోవచ్చును.

సాధారణంగా	ఘాతరూపం	సంవర్గమాన రూపం
	$a^x = M$	$\log_a M = x$

ఉదాహరణ : $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2.$

10 ఆధారానికి 100 యొక్క సంర్గమానం 2.

10 ఆధారంగల సంవర్గమానాలను సామాన్య సంవదర్గమానాలు అని 'e' ఆధారంగా గల సంవర్గమానాలను సహజ సంవర్గమానాలు అని పిలుస్తారు. [e = 2.71828 ....]

సాధారణ లేదా సామాన్య సంవర్గమానాలు గుణకారం, భాగహారం, వర్గము, వర్గమూలాలను కనుగొనడానికి ఎక్కువగా వుపయోగిస్తాము. దానికి మనం చెప్పుకొనే సంవర్గమాన సూత్రాలు ఉపయోగపడతాయి.

సంవర్గమాన ధర్మాలు

మనం కూలంకషంగా "ఘాతరూపం"ను "సంవర్గమాన రూపంలోనికి" మార్చవచ్చునని పరిశీలించడం జరిగినది. 8వ తరగతిలో ఘాతాంకాలు మరియు న్యాయాలను గూర్చి చాలా వివరంగా నేర్చుకున్నాము అని మనకు తెలుసు కదా! 10వ తరగతిలో సంవర్గమానంల భావనలను పరిచయము చేసే విషయంలో విద్యార్థుల స్థాయికి అనుగుణంగా వాటి ధర్మాలు, న్యాయాలను కొంతమేరకు చర్చించడము జరిగినది. మరింత సమగ్ర అవగాహన కొరకు సంవర్గమానంలలోని ధర్మాలను, న్యాయాలను మరొకసారి చర్చించుకుందాము.

$a^x = b$ ($a \neq 0$ మరియు $a \neq 1$) అనుకొందాము.

సంవర్గమాన రూపంలోనికి మార్చగా

$x = \log_a b$ అవుతుంది గదా!

పై సమీకరణములో $x = \log_a b$ ప్రతిక్షేపించగా

$a^{\log_a b} = b$ అవుతుందని గమనించవచ్చును.

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ ఇచ్చట $a \neq 0, a \neq 1$ మరియు $a \in \mathbb{R}^+$

- ***a, b, x* $\neq$ 1 లు శూన్యేతర ధనవాస్తవ సంఖ్యలు అయితే $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$**

నిరూపణ: $x^{\log_x a + \log_x b}$ తీసుకొనగా

$$x^{\log_x a + \log_x b} = x^{\log_x a} \times x^{\log_x b} \qquad \because a^{m+n} = a^m \times a^n$$

$$= ab \qquad \because a^{\log_a b} = b$$

$\therefore$ సంవర్గమాన రూపంలో రాయగా

$$\boxed{\log_x ab = \log_x a + \log_x b}$$

- **$a, b, x \neq 1$ లు శూన్యేతర ధనవాస్తవ సంఖ్యలయితే $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$**

నిరూపణ : $x^{\log_x a - \log_x b}$ తీసుకొనగా

$$x^{\log_x a - \log_x b} = \frac{x^{\log_x a}}{x^{\log_x b}} \qquad \left| \because a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \right.$$

$$= \frac{a}{b} \qquad \left| \because a^{\log_a b} = b \right.$$

సంవర్గమాన రూపంలో రాయగా

$$\boxed{\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b}$$

- $a \neq 1$, b లు శూన్యేతర ధనవాస్తవ సంఖ్యలు అయితే, $\log_a b^n = n \log_a b$, ఇచ్చట $n \in \mathbb{R}$

నిరూపణ : $a^{n \log_a b}$ తీసుకొనగా

$$a^{n\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^n \qquad \left| \because a^{mn} = (a^m)^n \right.$$

$$\therefore b^n \qquad \left| \because a^{\log_a b} = b \right.$$

సంవర్గమాన రూపంలోరాయగా

$$\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$$

- $\log(a+b) = \log a + \log b$ ($a \neq 0,\ b \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}^+$) అయితే a విలువను b పదంలలో రాయండి.
- $\log(a-b) = \log a - \log b$ ($a \neq 0,\ b \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}^+$) అయితే a విలువను b పదంలలో రాయండి.
- $\log_{b^\beta} a^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_b a$ ($a \neq 0,\ b \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}^+$ మరియు $b \neq 1$) అని చూపండి.

- **$a, b, c \neq 1$ లు శూన్యేతర ధనవాస్తవ సంఖ్యలయితే $\log_a b = \log_c b \times \log_a c$ (భూమి మార్పిడి సూత్రం)**

నిరూపణ : $a^{\log_c b \times \log_a c}$ తీసుకొనగా

$$a^{\log_c b \times \log_a c} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_c b} \quad \Big| \therefore\ a^{m \times n} = (a^n)^m$$

$$= c^{\log_c b}$$

$$= b$$

సంవర్గమాన రూపంలో రాయగా

$$\boxed{\log_a b = \log_c b \times \log_a c\,(c \neq 1)}$$

- $\log_b a = \dfrac{\log a}{\log b}$ గా రాయగలమా?
- $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a^b}$ గా రాయగలమా?

పై తరగతులలో ఋణసంఖ్యల యొక్క సంవర్గమానంలను కనుగొనడం నేర్చుకోవడం జరుగుతుంది. ప్రస్తుతం సెకండరీ స్థాయిలో వాటి గూర్చి చర్చించుకోవలసిన అవసరంలేదు.

ఒక సంఖ్య యొక్క సంవర్గమానం వ్యవస్థితం అయితే దాని విలువ ఏవిధంగా ఉంటుంది? ఒక సంఖ్య యొక్క సంవర్గమానం ఏకైకంగా ఉంటుందని మనం గమనించవచ్చును. రెండు వేర్వేరు ధన వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క సంవర్గమానంలు సమానం అయితే ఆ వాస్తవ సంఖ్యల మధ్య ఏదైన సంబంధంను ఏర్పరచ గలమా?

ఒకసారి పరిశీలిద్దాము.

$\log_a x = \log_a y$ అ.కొ.

ఇరువైపులా వాటిని a ఘాతంనకు పెంచగా

$$a^{\log_a x} = a^{\log_a y} \quad \Big| \because\ a^{\log_a b} = b$$

$x = y$

$\therefore \log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ అవుతుందని మనం గమనించవచ్చును.

- $\log_2(x^2 - 6x) = 3$ ను సాధించండి.
- $\log_2(x^2 + x) - \log_2(x+1) = 4$ ను సాధించండి.
- $2\log(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \log(5 + 2\sqrt{6})$ $(x > y)$ అయితే $x+y$ విలువను గణించండి.

అదే విధంగా రెండు సంవర్గమాన విలువల మధ్య గల అసమానత్వ ధర్మాలను గూర్చి క్లుప్తంగా చర్చించుకుందాము. మొదట $a^x > a^y$ అయితే x, y ల మధ్య సంబంధంను ఏవిధంగా ఏర్పరచగలమో పరిశీలిద్దాం.

$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$. ఇది అన్ని సందర్భంలలో నిర్వచితము అవుతుందా !

$a^x > a^y \Rightarrow x > y$ ($a > 1$ అయినప్పుడు)

$a^x > a^y \Rightarrow x < y$ ($0 < a < 1$ అయినప్పుడు)

పై ధర్మాలను ఉపయోగించి $\log_a x > \log_a y$ అయితే $a > 1$ లేదా $0 < a < 1$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ సందర్భములలో x మరియు y ల మధ్య గల సంబంధములను చర్చించుకొందాము.

$\log_a^x > \log_a^y$ $(a > 1)$ అయితే $x > y$ అవుతుంది

$\log_a^x > \log_a^y$ $(0 < a < 1)$ అయితే $x < y$ అవుతుంది. అని మనం గమనించవచ్చును.

- $\log_2(x-3) > \log_4(x-3)$ అయితే x విలువల సమితిని కనుగొనండి.
- $\log_{0.2}(x^2 - 5x + 7) < 0$ ను సాధించండి.

మనం ఇంతవరకు సంవర్గమానంల యొక్క భావనల గూర్చి, ధర్మాలు మరియు వాటి యొక్క న్యాయాల గూర్చి తెలుసుకోవడం జరిగినది. వీటి యొక్క ఆవశ్యకత ఏమిటి, దీనిని నిత్యజీవితంలో లేదా ఇతర శాస్త్రంలలో వీటిని ఏవిధంగా అనుసంధానం పరుస్తామో తెలుసుకుందాము. ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం మరియు ఘనమూలంలును వివిధ పద్ధతుల ద్వారా వివిధ తరగతులలో మనం పరిచయం చేయడం జరిగినది. కాని 4వ మూలం, 5వ మూలం .... మొదలగు విలువలకు కనుగొనుటకు ఏదైన పద్ధతి ఉన్నదా? వీటిని సంవర్గమాన న్యాయాలు ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

అదే విధంగా భౌతికశాస్త్రం, ఇంజనీరింగ్ మొదలగు సబ్జెక్టులలో సంవర్గమానంలను ఏవిధంగా అనుప్రయుక్తం చేయగలమో పరిశీలిద్దాము.

$10^1 = 10$ అయితే $\log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100$ అయితే $\log_{10} 100 = 2$ అని మనకు తెలుసూ

ఇప్పుడు $\log_{10} 20$ విలువను ఏవిధంగా కనుగొనవలెనో తెలుసుకొందామా.

$10 < 20 < 100$ అని మనకు తెలుసు.

$10^1 < 20 < 10^2$ అని రాయవచ్చును.

10 భూమికి సంవర్గమానం రాయగా

$\Rightarrow \log_{10} 10^1 < \log_{10} 20 < \log_{10} 10^2$

$\Rightarrow 1 < \log_{10} 20 < 2$

అనగా $\log_{10} 20$ విలువ 1 మరియు 2ల మధ్య ఉంటుందని చెప్పవచ్చును. మరి ఆ విలువను ఊహించగలమా!

$\log_{10} 20 \simeq 1.3010$ $\quad \because \log_{10} 2 = 0.3010$ సంవర్గమాన పట్టిక ఆధారంగా

$\boxed{\log_{10} 20 \simeq 1 + \text{ దశాంశ భాగం}}$

అదే విధంగా $\log_{10} 200 = \log_{10} 100 + \log_{10} 2$

$= 2 + 0.3010$

$= 2.3010$ అని గమనించవచ్చును.

$\log 3.52 = 0 + x$; ఇచ్చుట x దశాంశ భాగం అనుకొనుము. అయితే $\log 35.2$, $\log 352$, $\log 3520$ యొక్క విలువలను x పదంలలో రాయండి.

నోట్ : ఇచ్చుట $\log a$ అనగా $\log_{10} a$ అని అంటారు. దీనినే సామాన్య సంవర్గమానాలు లేదా బ్రిగ్స్ సంవర్గమానాలు అని అంటారు. వీటిని గూర్చి ఈ అధ్యాయములోని పరిచయములోనే చర్చించుకోవడం జరిగినది.

మనం పై సంఖ్యల యొక్క సంవర్గమానంలను ఈ క్రింది విధమగా రాయగలమని గమనించవచ్చును.

$$\log 35.2 = 1 + x$$

$$\log 352 = 2 + x$$

$$\log 3520 = 3 + x$$

వీటి క్రమంను పరిశీలించినట్లయితే 35.2, 352, 3520 ..... అన్ని సంఖ్యలకు దశాంశభాగం ఒకే విధంగా ఉంటుంది, కాని పూర్ణాంక భాగం మారుతుంది.

$\log_{10} x$ = పూర్ణాంకభాగం + దశాంశభాగం

నోట్:
- పూర్ణాంక భాగంను లాక్షణికం అని అంటారు.
- దశాంశ భాగంను మాంటిస్సా అని అంటారు.
- ఒకే సార్ధాంకంకములు కలిగియున్న సంఖ్యల యొక్క మాంటిస్సా ఒకే విధంగా ఉంటుంది, కాని పూర్ణాంక భాగంలోని అంకెల సంఖ్య మారుతుంది.

మాంటిస్సా విలువలను సంవర్గమాన పట్టికల ద్వారా గ్రహిస్తారు.

• $\log_{10} 2 = 0.3010$ అయితే 2^{50} అనే సంఖ్యలోని అంకెల సంఖ్యను తెల్పండి.

పై చర్చలో భాగంగా ఒక సంఖ్య యొక్క సంవర్గమానం లోని పూర్ణాంక భాగం (లాక్షణికం) ధనాత్మకం అని గమనించవచ్చును. కాని లాక్షణికం ఋణాత్మకం అయ్యే సందర్భంను ఆలోచించి, చర్చించండి.

కొన్ని ఆమ్లాల, క్షారంలు H^+ మరియు OH^- అయానుల గాఢతలను పేర్కొని వాటి యొక్క p^h విలువను కనుగొనుటకు ఒక ప్రాజెక్ట్ నమూనాను తయారుచేయండి.

అమరికలు

- ఒకట్ల స్థానంలో 5గా గల సంఖ్యల వర్గాలను వ్రాయడం :

$15^2 = 225$	పదుల స్థానంలోని సంఖ్యను
$25^2 = 625$	దాని తదుపరి సరి సంఖ్యచే గుణించి వచ్చిన సంఖ్యలు వందల స్థానంతో పది
$35^2 = 1225$	చివరగా '25' చేర్చాలి.

- తెలిసిన సంఖ్య వర్గ విలువ నుండి దానికి ముందు సంఖ్య, తదురి సంఖ్యల వర్గములు వ్రాయుట.

$10^2 = 100$

$11^2 = 121$ [= 100 + 10 + 11]

$12^2 = 144$ [= 121 + 11 + 12]

తదుపరి సంఖ్య వర్గానికి సంఖ్యవర్గాని ఆ సంఖ్య, తదుపరి సంఖ్యల మొత్తం కలపాలి.

$15^2 = 225$

$16^2 = 256$ [225 + 15 + 16]

$20^2 = 400$

$19^2 = 361$ [400 - (20 + 19)]

[క్రింది సంఖ్యకు ఆ సంఖ్య దాని ముందు సంఖ్యల మొత్తం తీసివేయాలి.

- తెలిసిన వర్గ సంఖ్యకు తదుపరి రెండవ సంఖ్య / ముందుగల రెండో సంఖ్య వాళ్లని కనుగోవడం.

ఉదా: $25^2 = 625$

$26^2 = 676$

$27^2 = 676 + 53 = 729$

$27^2 = 625 + 4 \times 26 = 625 + 104 = 729$

$27^2 = 25^2 + 4(26)$ (25, 27 ల మధ్య)

$23^2 = 25^2 - 4(24)$

$= 625 - 96$

$= 529.$

2, 3, 5, 10, 11 లకు సాధారణ సూత్రాలు తెలుసు.

- 7 యొక్క భాజ నియతా సూత్రం

7 $7 \times 1 = 7$

$7 \times 2 = 14$

$7 \times 3 = 21$

$7 \times 4 = 28$

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను రెట్టింపు చేసి పదుల స్థానం లోని అంకె సంఖ్య నుండి తీసివేయగా వచ్చు సంఖ్య 7 చేభాగింపబడిన ఆ సంఖ్య 7చే భాగింపడుతుంది.

- 19 యొక్క భాజ నియతా సూత్రం

$19 \times 1 = 19$

$19 \times 2 = 38$

$19 \times 3 = 57$

$19 \times 4 = 76$

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను 2చే గుణించి పదుల స్థానంలోని అంకె/సంఖ్యకు కలుపగా వచ్చిన సంఖ్య 19చే భాగింపబడిన ఆసంఖ్య 19చే భాగింపబడుతుంది.

- 13 యొక్క భాజ నియతా సూత్రం

$13 \times 1 = 13$

$13 \times 2 = 26$

$13 \times 3 = 39$

$13 \times 4 = 52$

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను 4చే గుణించి పదుల స్థానం లోని అంక/సంఖ్యకు కలపడం వల్ల వచ్చిన సంఖ్య 13చే భాగింపబడిన ఆ సంఖ్య 13చే భాగింపబడ్తుంది.

- 17 యొక్క భాజ నియతా సూత్రం

$17 \times 1 = 17$

$17 \times 2 = 34$

$17 \times 3 = 51$

$17 \times 4 = 68$

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 5 చే గుణించి పదుల స్థానంలోని అంకె నుండి తీసివేయుట వల్ల వచ్చిన సంఖ్య 17 చే భాగించబడిన ఆ సంఖ్య 17 చే భాగింపబడుతుంది.

కృత్యపత్రము – 1

1. యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధిని ఉపయోగించి 867 మరియు 255ల యొక్క గ.సా.భాను గణించండి.

2. ఏదేని బేసి పూర్ణసంఖ్య $6q + 1$ లేదా $6q + 3$ లేదా $6q + 5$ రూపంలో ఉంటుందని చూపండి. ఇచ్చుట $q \in Z$

3. యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధిని ఉపయోగించి ఏదేని ధనపూర్ణసంఖ్య యొక్క ఘనం 9m, 9m + 1 లేదా 9m + 8 రూపంలో ఉంటుందని చూపండి.

4. $\forall\, n \in Z$ కు $n^2 - n$ అనేది 2చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుందని చూపండి.

5. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

6. $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

7. $\sqrt[3]{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

8. 56 మరియు 72ల యొక్క గ.సా.భా d మరియు $d = 56x + 72y$ అయితే x మరియు y విలువలను కనుగొనండి.

9. x మరియు y అనే సంఖ్యలను 5చే భాగించగా వచ్చుడి శేషంలు వరుసగా 3 మరియు 4లు అయితే $(x^2 + y^2)$ ను 5చే భాగించగా వచ్చుడి శేషమును కనుగొనండి.

10. ఒక సంఖ్యను 189చే భాగించగా వచ్చెడి శేషము 129 అయితే అదే సంఖ్యను 27చే భాగించగా వచ్చెడి శేషమును కనుగొనండి.

కృత్యపత్రము – 2

(కరణులు)

1. $a, b, c, d \in Q, b > 0, d > 0$ మరియు $\sqrt{b}, \sqrt{d}$ లు కరణులు మరియు $a+\sqrt{b} = c+\sqrt{d}$ అయితే $a = c, b = d$ అని చూపండి.

2. $a, b, \sqrt{a^2-b}$ లు ధన అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు $\sqrt{b}$ ఒక కరణి మరియు $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ అయితే x, y లను కనుగొనండి.

3. $\sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}, \sqrt{3}$ లను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయండి.

4. $\dfrac{4\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = x-\sqrt{y}$ అయితే $x + y$ విలువను కనుగొనండి.

5. i) $\sqrt{11}-\sqrt{5}, \sqrt{19}-\sqrt{13}$ లలో పెద్దది ఏది ? ii) $2+\sqrt{5}$ ని సంఖ్యారేఖపై ప్రాతినిధ్యపరచండి.

6. $a > 0, b^2 > 1$ మరియు $x = \dfrac{2ab}{b^2+1}$ అయితే $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \dfrac{1}{b}$ అని చూపండి.

7. $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$ విలువ ఒక సహజసంఖ్య అని చూపండి.

8. $x = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ అయితే i) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ii) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ విలువలను గణించండి.

9. $x^2 + y^2 + 10 = 2\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y$ అయితే $x + y$ విలువను కనుగొనుము.

10. $x = \sqrt{7}-\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}-\sqrt{3}, z = \sqrt{3}-\sqrt{7}$ అయితే $x^3 + y^3 + z^3$ విలువను కనుగొనండి.

కృత్యపత్రము - 3

(సంవర్గమానాలు)

1. a, b, c లు శూన్యేతర ధనవాస్తవసంఖ్యలు, అయితే $c \neq 1$ అయితే $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ అని చూపండి.

2. $\log_{10} 3 = a$, $\log_{10} 2 = b$ అయితే $\log_5 6$ విలువను a, b పదంలలో రాయండి.

3. $\log_{10} \tan 1^0 + \log_{10} \tan 2^0 + ... + \log_{10} \tan 89^0$ విలువను కనుగొనండి.

4. $\log_2^5$ ఒక అకరణీయ సంఖ్యకాదు అని చూపండి.

5. $\log_{12}^{27} = \alpha$ అయితే $\log_6^{32}$ విలువను గణించండి.

6. $9^{\log_3 2\sqrt{5}+\frac{1}{2}}$ విలువను గణించండి.

7. $\log_{5\sqrt{3}} 5625$ విలువను గణించండి.

8. $\log_{10} a = 2x + y$ మరియు $\log_{10} b = x - 2y$ అయితే $\log_{10}\left(\frac{10a^3}{b^2}\right)$ విలువను x మరియు y పదంలలో వ్యక్తపరచండి.

9. $\left(\log_{10}^{x}\right)^2 - \left(\log_{10}^{x}\right) - 6 = 0$ ను సాధించండి.

10. $y = \log_a^x \ (x > 0,\ a > 1)$ యొక్క రేఖాచిత్రంను గీయండి.

11. $a, b \in \mathrm{R}^+ - \{0\}$ అయితే $\log_b^a + \log_a^b \geq 2$ అని నిరూపించండి.

12. $\log_{2\sqrt{2}} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ విలువను గణించండి.

అమరికలు (Patterns)

- ఏ నాలుగు వరుస సంఖ్యలలోనైన మొదటి చివరి సంఖ్యల మొత్తం మధ్య సంఖ్య మొత్తానికి సమానం

  a, b, c, d వరుస సంఖ్యలకు $a + d = b + c$.

- ఇదే విధంగా ఏ నాలుగు వరుస సంఖ్యలకైనా మొదటి చివరి సంఖ్యల లబ్ధం కన్న మధ్య సంఖ్యల లబ్ధం రెండు ఎక్కువ

  11, 12, 13, 14

  $11 \times 14 = 154$

  $12 \times 13 = 156$

- మధ్యసంఖ్యల లబ్ధము చివరి సంఖ్యల లబ్ధానికన్న రెండెక్కువ.
- గణితం లోని చాలా సూత్రాలు (Pattern observation) ద్వారా పొందవచ్చు.

a	b	c	d
0 1	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3 4
2 3	3 4 5	4 5 6 7	5 6 7 8 9
4 5	6 7 8	8 9 10 11	10 11 12 13 14
6 7	9 10 11	12 13 14 15	15 16 17 18 19
8 9	12 13 14	16 17 18 19	20 21 22 23 24
- -	- - -	- - - -	- - - - -
- -	- - -	- - - -	- - - - -

పై పట్టికలు (a), (b), (c), (d) లలో అమర్చిన పూర్ణాంకములను గమనించి వాటికి సాధారణ రూపంలను ఏ విధంగా రాయగలమో తెలుసుకొందాం.

- పై పట్టికలలోని అమరికల ద్వారా ఏమి గమనించవచ్చును ?
- పట్టిక (a) లోని మొదటి నిలువు వరుసలోని సంఖ్యలు ఏవిధంగా ఉన్నాయి?
- పట్టిక (a) లోని అన్ని నిలువు వరుసలను గమనించి ఏదైన సాధారణ రూపం రాయగలమా?
- అదేవిధంగా (c) మరియు (d) పట్టికలోని సంఖ్యల అమరిక ఆధారంగా ఏదైన సాధారణ రూపం రాయగలమా?

పై పట్టిక ద్వారా ఈ క్రింది విధంగా సాధారణీకరణం చేసి "యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి" యొక్క రూపంను రాబట్టవచ్చును.

నోట్:

నిలువు వరుస / సాధారణరూపం	2	3	4	5	.....	b
	$2q$	$3q$	$4q$	$5q$		bq
	$2q+1$	$3q+1$	$4q+1$	$5q+1$		$bq+1$
		$3q+2$	$4q+2$	$5q+2$		$bq+2$
			$4q+3$	$5q+3$		$bq+3$
				$5q+4$		$bq+4$
						....
						....
						$bq+r$

$\therefore\ a = bq + r$ ఇచ్చుట $r = 0$ లేదా $r < b$ రూపంలో రాయగలమని గమనించవచ్చును.

అదనపు సమాచారం

రామానుజన్ సంఖ్య విశిష్టత

(1729)

1. రెండు ఘనసంఖ్యల మొత్తంగా, రెండు విధాల వ్రాయగల్గిన సహజ సంఖ్యలలో 1729 కనిష్టసంఖ్య

$$1729 = 1^3 + 12^3$$

$$= 9^3 + 10^3$$

నోట్:- ఇలాంటి సంఖ్యలు 50,00,000 లోపు 101 వున్నాయి, 1729 తరువాత, రెండు ఘనసంఖ్యల మొత్తంగా రెండు విధాలుగా వ్రాయగలిగిన సంఖ్య 4104

$$4104 = 2^3 + 16^3$$

$$= 9^3 + 15^3$$

2) 1729ని నాలుగు కారణాంకాల లబ్దంగా వ్రాయవచ్చును.

$1729 = 1 \times 7 \times 13 \times 19$. ఈ నాలుగు కారణాంకములు అంకశ్రేఢి (A.P.)లో ఉన్నాయి.

3) 1729లోని అంకెలను ఉపయోగించి రెండంకెల నాలుగు ప్రధానసంఖ్యలు రాయవచ్చును. ఉదా:- 17, 71, 79, 97.

4) 1729ని రెండు వర్గ సంఖ్యల బేధంగా నాలుగు విధాలుగా రాయవచ్చును.

$$1729 = 55^2 - 36^2$$

$$= 73^2 - 60^2$$

$$= 127^2 - 120^2$$

$$= 865^2 - 864^2$$

5) 1729ని 43 చేత గుణకారం చేయగా "పాలినోడ్రోమ్ సంఖ్య" వస్తుంది.

$$1729 \times 43 = 74347$$

6) ఒక భుజం పొడవు 1729 కలిగి మిగతా భుజాలు కూడా పూర్ణాంకాలైన లంబకోణత్రిభుజములు 13 ఉన్నాయి.

7) 1729 = 91(1 + 7 + 2 + 9)

SRINIVASA అనే పదంలోని అక్షరంల సంఖ్య 10

RAMANUJAN అనే పదంలోని అక్షరంల సంఖ్య 9

$10^3 + 9^3 = 1729$ (రామానుజన్ సంఖ్య)

అన్ని 9 అంకెలు కలిగియున్న అతి చిన్న పరిపూర్ణవర్గ సంఖ్య 1 3 9 8 5 4 2 7 6

$1\,3\,9\,8\,5\,4\,2\,7\,6 = (11826)^2$

13 ప్రత్యేకత

13ను 3 + 2 + 8 గా రాయవచ్చును. ఈ మూడు అంకెలను ప్రక్క ప్రక్కన ఉంచితే 328 అవుతుంది. దీని వర్గం 107584 ఈ అంకెలను ఎడమ నుండి జతలుగా విడదీస్తే 10, 75, 84 అవుతాయి. వీటి మొత్తం 169.

∴ 13 యొక్క వర్గం

13 = 4 + 0 + 9;	409^2 = 167281,	16 + 72 + 81 = 169
13 = 5 + 2 + 6;	526^2 = 276676,	27 + 66 + 76 = 169
13 = 7 + 2 + 4;	724^2 = 524176,	52 + 41 + 76 = 169
13 = 8 + 2 + 3;	823^2 = 677329,	67 + 73 + 29 = 169
13 = 9 + 2 + 2;	922^2 = 850084	85 + 00 + 84 = 169

పుట్టినరోజు – వింతచదరం

రామానుజన్ అతని పుట్టిన రోజు ఆధారంగా ఏర్పడ్డ వింత చదరాన్ని గమనించండి. దాని ఆధారంగా సాధారణీకరణం చేసి ఎవరి పుట్టినరోజైనా వింత చదరాన్ని కనుగొన్న చదరాన్ని గమనించండి. ఎన్నిరకాలుగా ఏ నాలుగు గళ్ళ మొత్తం వింత మొత్తానికి (A + B + C + D)ని సంతృప్తిపరుస్తుంది.

రామానుజన్ వింత చదరం

22	12	18	87
88	17	09	25
10	24	89	16
19	86	23	11

ఎవరి పుట్టినరోజైనా వింత చదరం రాసే విధానం

పుట్టిన తేది = A

పుట్టిన నెల = B

పుట్టిన శతాబ్దం = C

పుట్టిన సంవత్సరం =D

(చివరి రెండు నెలలు)

A	B	C	D
D + 1	C-1	B-3	A+3
B - 2	A+2	D+2	C-2
C+1	D-1	A+1	B-1

రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. కనుగొనుట మరియొక్క పద్ధతి.

1. GCD (57, 36) = GCD (57-36, 36) = GCD (21, 36)

= GCD (21, 36-21) = GCD (21, 15) = GCD (21-15, 15)

= GCD (6, 15) = GCD (6, 15-6) = GCD (6, 9) = GCD (6, 9-6)

= GCD (6, 3) = GCD (6-3, 3) = GCD (3, 3) = 3

యూక్లిడ్ భాగహార సహాయ సిద్ధాంతం

a మరియు b లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $b > 0$ అయినపుడు

$$a = bq + r \qquad 0 \leq r < b$$

అగునట్లు ఎవైనా సంఖ్యలు q మరియు r లు ఉండును.

మనకు ఈ ఇడియా 'a' వస్తువులు 'b' మంది సమముగా పంచుకొనగా ఒక్కొరికి q వస్తువులు వచి 'r' శేషముగా మిగులును అను సందర్భములో గమనించవచ్చు. ఇక్కడ $r = 0$ అయిన $a = bq$ అగును. అనగా a ను 'b' నిశ్శేషముగా భాగించును $b|a$

$a, b \in z$ మరియు $d\,|\,a,\ d\,|\,b$ అయితే 'd' అగును.

a, b ల సామాన్య కారణం.

$d\,/a$ మరియు $d\,|\,b$ అయిన $d\,|\,(a-b),\ d\,|\,(a+b),\ d\,|\,ax\ (x \in z)$ అగును.

$a = bq + r$ కావున

$(a - bq) = r$ $d\,|\,a$ మరియు $d\,|\,bq$ అయితే $d\,|\,(a - bq)$ కావున $d\,|\,r$.

- **ఏదేని సహజసంఖ్య n రెండు వరుససంఖ్యల లబ్ధం అయినప్పుడు $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+.....}}}$ విలువ, ఆ రెండు సంఖ్యలలోని పెద్ద సంఖ్యకు సమానమవుతుంది.**

మొదటి పద్ధతి

$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+.....\infty}}} = x$ అనుకొనిన

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$n+\sqrt{n+\sqrt{n+.....\infty}} = x^2$

$n + x = x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - n = 0 \qquad \because\ n = k(k+1)$ అనుకొనిన

$\Rightarrow \quad x^2 - x - k(k+1) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - k^2 - x - k = 0$

$\Rightarrow \quad (x - k)\,(x + k) - 1(x + k) = 0$

$(x + k)\,(x - k - 1)$

$x = -k \quad | \quad x = k + 1$

n ధనసంఖ్య కావున $x \neq -k$. కావున $x = k+1$

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+.....\propto}}} = k+1\cdot$$

రెండవ పద్ధతి :

$n = x(x + 1)$ అనుకొను $x > 0$ మరియు $x \in \mathrm{N}$

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+.....\propto}}} = y \quad \text{అనుకొనిన}$$

$$\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)\sqrt{x(x+1).....\propto}}} = y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x+1)+y} = y$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$x(x+1)+y = y^2$$

$$y^2 - y - x(x+1) = 0$$

$$\therefore\ y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x(x+1)}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{4x^2+4x+1}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm (2x+1)}{2}$$

$$= (x+1) \text{ లేదా } -x$$

x ధనసంఖ్య కావున $y \neq -x$, $y = x+1$ అవుతుంది.

$$\therefore\ \sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)+.....\alpha}} = x+1$$

- $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+.........\propto}}}$ విలువ ఎంత ?
- $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+.........\propto}}}$ విలువ ఎంత ?

ప్రాజెక్ట్ పని

1. ఉద్దేశ్యము : ప్రయోగాత్మముగా "యూక్లిడ్ భాగహారశేషవిధి" అనువర్తింపచేసి రెండు దత్తసంఖ్యల యొక్క గ.సా.భాను కనుగొనుట.

2. కావలసిన వస్తువులు :

. అట్టముక్కలు . వివిధ రంగు కాగితములు

. కత్తెర . జామెట్రీ బాక్స్

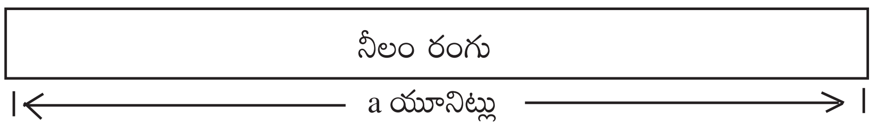
. స్కెచ్ పెన్నులు . గమ్‌బాటిల్

3. పద్ధతి :

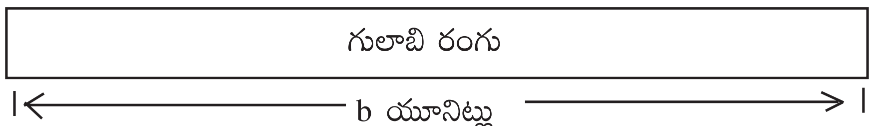
(i) తగిన కొలతలు కలిగిన అట్టముక్కలను తీసుకొనవలెను.

(ii) దానిలో ఒక అట్టముక్కను తీసుకొని ($b < a$) అయ్యేటట్లు b యూనిట్ల పొడవు కలిగిన ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార ముక్కను కత్తిరించవలెను. ($c < b$) అయ్యేటట్లు c యూనిట్ల పొడవు కలిగిన రెండు దీర్ఘచతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించవలెను. ($d < c$) అయ్యేటట్లు b యూనిట్ల పొడవు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు ముక్కను కత్తిరించవలెను. అదేవిధంగా ($e < d$) అయ్యేటట్లు రెండు దీర్ఘచతురస్రాకార ముక్కల వెడల్పు ఒకేవిధంగా ఉండునట్లు కత్తిరించవలెను.

(iii) 1.1 నుండి 1.5 లోని పటంలలో చూపిన విధంగా వివిధ రంగు కాగితంలను (ii) లోని దీర్ఘచతురస్రాకార అట్టముక్కలపై అతికించవలెను.

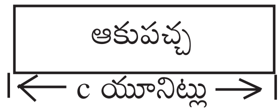


పటం 1.1

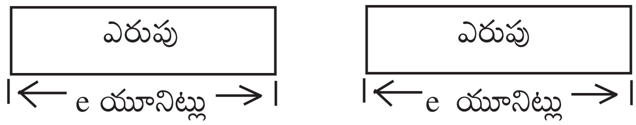


పటం. 1.2

పటం 1.3

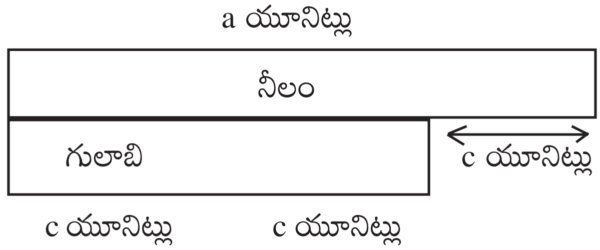


పటం 1.4

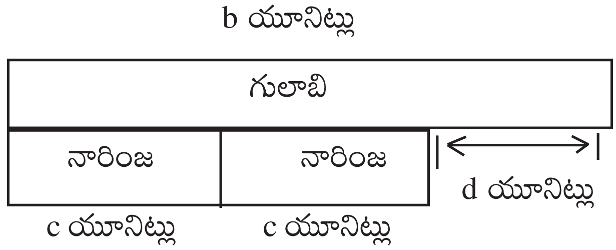


పటం. 1.5

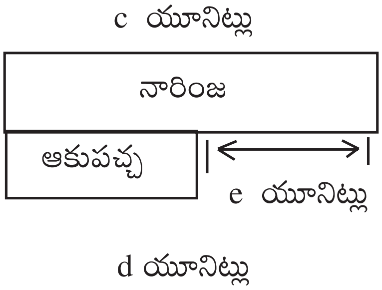
(iv) 1.6 నుండి 1.9 పటంలలో చూపిన విధంగా పై విధంగా కత్తిరించిన ముక్కలను మరియొక్క అట్టముక్కలపై అతికించవలెను.



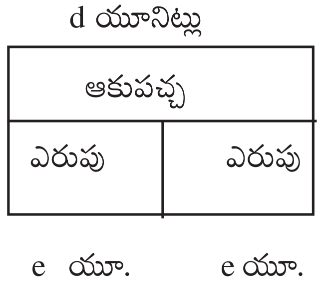
పటం 1.6



పటం 1.7



పటం 1.8



పటం 1.9

4. పరిశీలన :

పటం 1.6 నుండి a = b × 1 + c ఇచ్చుట $q = 1, r = c$ ...(1)

పటం 1.7 నుండి b = c × 2 + d ఇచ్చుట $q = 2, r = d$ ...(2)

పటం 1.8 నుండి c = d × 1 + e ఇచ్చుట $q = 1, r = e$ ...(3)

పటం 1.9 నుండి d = e × 2 + 0 ఇచ్చుట $q = 2, r = 0$ ...(4)

(1), (2), (3) మరియు (4)ల నుండి పై పటంలోని అమరికల ద్వారా "యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి" సోపానంలు పాటిస్తాయి అని గమనించవచ్చును. అనగా ఈ ప్రయోగం ద్వారా "యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధి"ని కనుగొనవచ్చును.

$\therefore$ GCD (a, b) = GCD (b, c) = GCD (c, d) = GCD (d, e)

= e

కావున GCD (a, b) = e

5. ఫలితం : దత్త సంఖ్యల యొక్క గ.సా.భాను ప్రయోగాత్మకంగా యూక్లిడ్ భాగహార శేషవిధిని వర్తింపచేస్తూ కనుగొనవచ్చును.

> * 9, 12ల గ.సా.భా.ను ప్రాజెక్ట్ పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి లేదా ICT ని ఉపయోగించి 9, 12ల గ.సా.భాను కనుగొనండి.

రిఫరెన్స్ గ్రంథాలు

1. Shirali S.A. - First steps in number theory (universities press)
2. Beiler A.H - Recreations in the theory of numbers (Dover)
3. M.K. Singal, A.R. Singal - Olympiad Mathematics (Pitamber publications)
4. NCERT 8th, 9th and 10th Class Text Books.

2

బీజగణితం

ఉపోద్ఘాతము

సాధారణంగా గణితంలోని వివిధ అంశములకు సంబంధించిన సందర్భములలో అనగా సంఖ్యావ్యవస్థ, జ్యామితీ, క్షేత్రమితి మొదలగు రంగాలకు సంబంధించిన అధ్యాయాలలో చాలా వరకు సూత్రాలను ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించవలసిన అవసరం ఉన్నది. ఇట్టి సూత్రాలలోని పదాలు "చరరాశులు"గా పరిగణనలోకి తీసుకోవడం జరుగుతుంది. గణితములోని అధ్యాయములలో దాదాపు అన్ని వ్రాతసమస్యలను సంజ్ఞారూపంలోకి మార్చి చేయవలసిన అవసరం ఉంది. వీటి కొరకు బీజియపదాలు ప్రాచుర్యములోకి రావడం జరిగినది. అందువలన ఒక విద్యార్థి భవిష్యత్తులో గణితంలోని వివిధ రంగాలలోని అన్ని అంశాలను విస్తృతముగా అవగాహన పరచుకొని, నిత్యజీవితంలో కాని లేదా తాను ఎన్నుకొన్న రంగంలో కాని వినియోగించుట కొరకు 6వ తరగతి నుండి 10వరగతి వరకు బీజగణితములోని అంశాలను వారి, వారి మానసిక స్థాయిలకు అనుగుణంగా తరగతుల వారీగా ప్రవేశపెట్టడం జరిగినది. బీజగణితములోని అంశాలను తరగతుల వారీ విభజన గ్రిడ్‌ను మనము ఒకసారి పరిశీలిద్దాము.

బీజగణితంలోని అంశాలు తరగతుల వారీగా విభజన

6th	7th	8th	9th	10th
బీజగణితం – పరిచయం – చరరాశి పరిచయం • తెలియని రాశి ఆధారంగా • క్రమాల ఆధారంగా – చరరాశి పరిమితులు • చరరాశి ఆధారంగా ఇచ్చిన వాక్యాలను, క్రమాలను వ్యక్త పరచడం – చరరాశులతో సమానం – జ్యామితీయ, సంఖ్యా నియమాలలో చరరాశి అన్వయం (రేఖాగణితం, క్షేత్రమితికి సంబంధించిన సూత్రాలు) – సామాన్య సమీకరణాలు – సమీకరణానికి LHS మరియు RHS – • సమీకరణ సాధన (సమీకరణ మూలం) యత్నదోష పద్ధతి	• సామాన్య సమీకరణాలు . 6వతరగతిలో నేర్చుకున్న సామాన్య సమీకరణం – చర్చ – సమీకరణ సాధన – సమీకరణసాధన–పద్ధతులు • యత్నదోష పద్ధతి • ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి • రాశిపక్షాంతరం చెందించే పద్ధతి (Transposition method) • నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలో సమీకరణాల వినియోగం	• ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు – పరిచయం (7వ తరగతి నుండి ఘాతాంకాల భావనలు) – ఋణఘాతాంకాలు ఘతాంకన్యాయాలు – ఘాతాంక రూపంలో నున్న బీజీయ సమీకరణాల సాధన బీజీయ సమాసాలు – పరిచయం (పునర్విమర్శ – • బీజీయపదం • సంఖ్యాపదం • సజాతి, విజాతి పదాలు • పరిమాణం • సంకలనం, వ్యవకలనం) – బీజీయ సమాసాల గుణకారం • ఏకపదుల గుణకారం • ద్విపది–ఏకపది, ద్విపది – ద్విపది ద్విపది – త్రిపది	**బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన** – బీజీయ సమాసం–బహుపది –ఏకచరరాశిలో బహుపదులు –బహుపది పరిమాణం –పదాల సంఖ్యను బట్టి బహుపదులలో రకాలు • ఏకపది ద్విపది త్రిపది బహుపది – బహుపది శూన్యవిలువలు –బహుపదుల భాగహారం – శేషసిద్ధాంతం – బహుపది యొక్క కారణాంక విభజన – బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు (జ్యామితీయ వివరణ) – బీజగణిత సర్వసమీకరణాల అనువర్తనం	**బహుపదులు** – బహుపదులు – పునఃశ్చరణ • అర్థం • పరిమాణం • విలువ –బహుపది శూన్యం – రేఖీయ బహుపది రేఖా చిత్రములు శూన్యం భావన – వర్గ బహుపది రేఖా చిత్రం శూన్యం – భావన –ఘనబహుపది – రేఖా చిత్రములు శూన్యము, భావన – బహుపది గుణకాలకు శూన్యాలకు మధ్య సంబంధం • వర్గబహుపది • ఘన బహుపది రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత – రేఖీయ సమీకరణాల పునఃశ్చరణ తయారు చేయడం –గ్రాఫు ఆధారంగా రేఖీయ సమీకరణాల సాధన

6th	7th	8th	9th	10th
	బీజీయ సమాసాలు – 6వతరగతి నుండి పునర్విమర్శ 'పరిచయం' ● చరరాశి, స్థిరరాశి ● వాక్యాలను చరరాశి, గుర్తులను ఉపయోగించి తెలపడం. –బీజీయ పదము, సంఖ్యాపదము సజాతీయ మరియు విజాతీయ పదాలు, గుణకం –బీజీయ సమాసములు . సంఖ్యాసమాసాలు మరియు బీజీయ సమాసాలు – బీజీయ సమాసాల రకాలు . ఏకపది . ద్విపది . త్రిపది . బహుళపది – బీజీయ సమాసం యొక్క పరిమాణం – సజాతి పదాల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం – విజాతి పదాల కూడిక మరియు తీసివేత – బీజీయ సమాస సూక్ష్మీకరణ	– సర్వ సమీకరణాలు . ప్రామాణిక సర్వ సమీకరణాలు – సర్వసమీకరణాలు వినియోగాలు – సర్వసమీకరణాలను సరిచూడడం కారణాంక విభజన – సంఖ్యల కారణాంకాలచే ఉపోద్ఘాతం – ఏకపదులు – కారణాకాలు – కారణాంక విభజన ఆవశ్యకత – సామాన్య కారణాంకాల పద్ధతి(గ.సా.భా పద్ధతి) . అనువైన సమూహాలు . సర్వసమానత్వములను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయుట – బీజీయ సమాసాల భాగహారం, . ఏకపదిని మరొక ఏకపదిచే భాగహారం . సమాసము – ఏకపది . సమాసము – సమాసము	**రెండు చరరాశిల్లో రేఖీయ సమీకరణాలు** – పరిచయం (రేఖీయ సమీకరణాలను తయారు చేయడం భావన) – రేఖీయ సమీకరణాల సాధన – రెండు చరరాశుల్లో రేఖీ సమీకరణం సాధన – భావన – రేఖీయ సమీకరణ యుగ్మములు – సాధన (గ్రాఫు ద్వారా) – రెండు చరరాశుల్లో రేఖీయ సమీకరణ యుగ్మాలు – అనువర్తనాలు నిరూపకజ్యామితి – నిరూపక జ్యామితి– పరిచయం (తలం, అక్షాలు, స్థానం, బిందువు, నిరూపకాలు, తలంలోని పాదాలు) – బిందువులను నిరూపకాక్షాలపై గుర్తించడం.	– రేఖీయ సమీకరణాల సాధన ఆధారంగా రేఖీయ సమీకరణాల రకాలు ● సంగత సమీకరణాల (ఎ) ఏకైక సాధన కలని (బి) పరస్పరాధిత సమీకరణాలు ● అసంగత సమీకరణాలు ● గుణకములు మరియు సమీకరణ వ్యవస్థ స్వభావం మధ్యగల సంబంధం. – సాధన పద్ధతులు మరియు అనువర్తనాలు – రెండు చరరాశుల్లో రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చగలిగే సమీకరణాలు

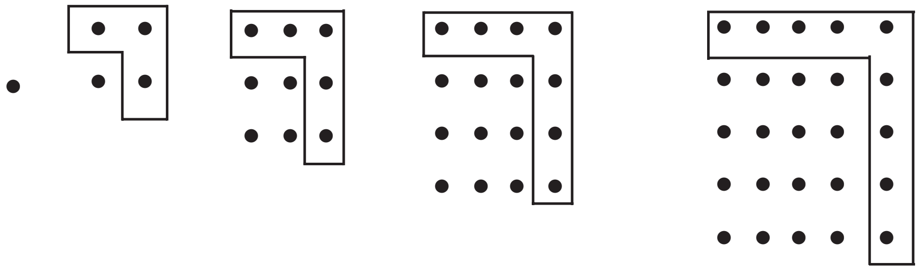
6th	7th	8th	9th	10th
	– బీజీయ సమాస ప్రామాణిక రూపం – బీజీయసమాసం యొక్క విలువ కనుగనడం – బీజీయ సమాసాల సంకలనం, వ్యవకలనం – పద్ధతలు • అడ్డుపద్ధతి • నిలువు పద్ధతి (దొంతి పద్ధతి) **ఘాతాంకాలు** – ఘాతాంకాలు – పరిచయం – ఘాతాంక రూఊపం (చర రాశుల్లో) –ఘాతాంక రూపంలో నున్న బీజీయ సమాసాల గుణకారం, భాగహారం, ఘాతాంక న్యాయాల అనువర్తన			

చర్చనీయాంశం : (1) చరరాశి అంటే ఏమిటి?

(2) చరరాశి యొక్క ఆవశ్యకత ఏమిటి?

ఒక పాఠశాలలోని ఒక విద్యార్థికి చాలారోజులుగా ఒక అనుమానం ఉంది. తన ఉపాధ్యాయుడు తరగతిలో సమస్యల సాధనాల్లో ప్రతీసారీ x అనీ a అనీ ఇంకా ఇప్పుడు ఇంగ్లీషు అక్షరాలు ఎక్కువగా వాడుతున్నారు. అసలు ఇవి ఏమిటి? ఇవి లేకపోతే లెక్కలు చేయలేమా? దీని గురించి తన ఉపాధ్యాయుడిని చాలా రోజులుగా అడగాలనుకున్నాడు. మీరైతే దీన్ని ఆవిద్యార్థికి ఎలా అవగాహనపరుస్తారు?

ఈ విషయాన్ని చర్చించడానికి ఒక సందర్భాన్ని గమనిద్దాం.



పై అమరికలో ప్రతీసారీ ఎన్ని చుక్కలు (దాని ముందున్న దానికి) కలుపబడతున్నాయి కదూ! పై చదరాలను గమనించండి. ఇలా "**ఈ క్రమంలో**" 99వ చదరానికి ఎన్ని చుక్కలు కలిపితే 100వ చదరం ఏర్పడుతుంది? ఎలా చెప్పగలరు?

ఒకసారి దీన్ని గమనించి ఏమైనా సాధారణీకరణం చేయగలమో ఆలోచిద్దాం.

చదరపు సంఖ్య	కలిపిన చుక్కల సంఖ్య
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
.	.
.	.

పై పట్టికలో నుండి క్రమాన్ని గమనించినట్లయితే ప్రతిసారీ చదరాలకు కలుపబడిన చుక్కలు 1, 3, 5, 7, 9 ….. అనగా బేసి సంఖ్యలతో చుక్కలను ప్రతీసారి ముందుచదరానికి కలుపుతున్నాం. ఇక్కడ ప్రధాన ప్రశ్న ఏమిటంటే బేసి సంఖ్యలు ఏవి? వాటి సాధారణ రూపమేమిటి?

ఏవైతే '2'చే భాగించగా 'శేషం' '1'ని ఇస్తాయో ఆ సంఖ్యలనే బేసి సంఖ్యలు అంటారు. ఇంకొక విధంగా చెప్పాలంటే ఏదైనా సంఖ్యను 2చేత గుణించి దానికి '1' ని కలిపినా లేదా '1'ని తీసివేసినా బేసి సంఖ్య అవుతుంది.

మరిపై పట్టిక నుండి గమనించినట్లయితే చదరపు సంఖ్యకు దానికి కలుపబడిన చుక్కల సంఖ్యకు ఏదైనా సంబంధం ఉన్నదా?

చదరపు సంఖ్య	కలిపిన చుక్కల సంఖ్య	దీని మరొరూపం
1	1	$2 \times 1 - 1$
2	3	$2 \times 2 - 1$
3	5	$2 \times 3 - 1$
4	7	$2 \times 4 - 1$
5	9	$2 \times 5 - 1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

పై పట్టికను గమనించండి.

దీని నుండి మనము ముందు అడిగిన ప్రశ్నకు సమాధానం రాయగలం కదా!

100వ చదరం పొందడానికి దాని ముందున్న 99వ చదరానికి కలపాల్సిన చుక్కల సంఖ్య.

$$2 \times 100 - 1 \quad = 200 - 1 \;= 199$$

ఇదేవిధంగా మీరు 200వ చదరం గాని, 1000వ చదరం గాని పొందాలంటే దాని ముందున్న చదరానికి ఎన్ని చుక్కలు కలపాలో చెప్పవచ్చు కదా!

ఇంత సులభంగా చెప్పడానికి కారణమయ్యింటుంది.

ఎందుకంటే మీరు మీ మదిలో దీనికై ఒక సాధారణీకరణం చేసుకొని ఉంటారు. అదేమిటంటే మనకు కావలసిన సంఖ్య గల చదరాన్ని పొందడానికి "ఆ సంఖ్యను 2చే గుణించి దాని నుండి '1' ని తీసివేస్తే మనకు కావలసిన చుక్కల సంఖ్య వస్తుంది".

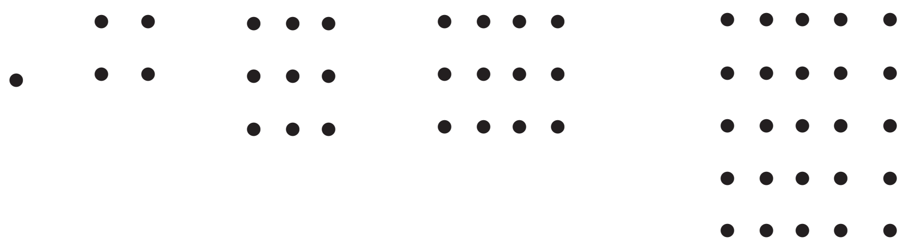
ప్రతీసారీ ఇంత పెద్ద వాక్యాలు రాయడానికి బదులుగా గణితరూపంలో "$2n-1$" గా చెప్పుకుంటే సరిపోతుంది కదా.

ఇక్కడ 'n' విలువ 1, 2, 3, 4, ... ఈ విధంగా ఏదైనా సంఖ్య తీసుకున్న మనకు కావలసిన సంఖ్య వస్తుంది కదా.

సందర్భాన్నిబట్టి 'n' విలువ 1, 2, 3, 4, ... లలో ఏదైనా విలువ కావచ్చు. కావున n ఇక్కడ ఏదైనా ఒక స్థిరరాశి కాదు. మరేమిటి? 'n' అనేది చరరాశి.

ఇలాంటి చరరాశి అవసరం ఇంకా ఎక్కడ ఉండవచ్చు ?

ఇంతకు ముందటి చదరముల క్రమాన్ని మళ్ళీ గమనిద్దాం.



ఇలా మనం చదరాలను రూపొందిస్తూ పోతే 100వ చదరములోని మొత్తం చుక్కల సంఖ్య ఎంత?

చదరపు సంఖ్య	మొత్తం చుక్కల సంఖ్య	దీని మరోరూపం
1	1	1^2
2	4	2^2
3	9	3^2
4	1^6	4^2
.	.	.
.	.	.

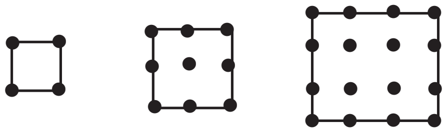
పై పట్టిక నుండి గమనించినట్లయితే 100 చదరంలోని మొత్తం చుక్కల సంఖ్య $100^2 = 10000$ అని తెలుస్తుంది. పైన రాసిన విధంగా మనం దీన్ని చరరోనుపయోగించి సాధారణరూపం రాయగలమా ?

చదరంలోని మొత్తం చుక్కల సంఖ్య = $(\text{చదరం సంఖ్య})^2$

$$= n^2$$

ఇక్కడ n అనేది ఏదేని ఒక స్థిరరాశి కాకుండా 1, 2, 3, 4 .... ఏదైనా కావచ్చు.

అంతేకాకుండా పై విషయాన్ని గమనించినట్లయితే ఏవేని రెండు చుక్కల మధ్యదూరం 1 యూనిట్ అనుకుంటే ఆ చుక్కలతో ఏర్పడే చతురస్ర వైశాల్యం ఏమవుతుంది.



మొదట చదరం యొక్క భుజం పొడవు '1' యూనిట్ మరియు దాని వైశాల్యం 1 చదరపు యూనిట్ అవుతుంది. ఇదేవిధంగా రెండవ చదరం భుజం పొడవు 2 యూనిట్లు దానివైశాల్యం '4' చ.యూ. ఇలాగే మూడవ చదరం యొక్క వైశాల్యం '9' చ.యూ. అని చెప్పవచ్చు.

ఇంతకు ముందుచర్చ ఆధారంగా 100 యూనిట్ల భుజంగా గల చదరం యొక్క వైశాల్యం ఏమవుతుందో ఊహించగలరా? మీ సమాధానం $100^2 = 1000$ చ.యూనిట్లు కదా! దీన్ని సాధరణీకరణిద్దాం.

చతురస్రవైశాల్యం = భుజం^{2} = a^2

ఇక్కడ 'a' చరరాశి. అంటే చరరాశులను ఎక్కడ ఉపయోగిస్తున్నాం. క్రమాల నుండి నియమాల నుండి సాధారణీకరణాలు చేసేటపుడు వాటిని చరరాశులచే ప్రాతినిధ్య పరుస్తూ తెలుపుతుంటాం. వీటినే సూత్రాల అని అంటుంటాం.

ఈ విధంగా సూత్రీకరణ చేయడంలో విద్యార్థులకు గణిత పదజాలంతో కూడిన సాధరణీకరణ వాక్యాలు చరరాశులనుపయోగించి సంజ్ఞారూపంలో తెలపడం అభ్యాసం కావలసి ఉంటుంది.

ఉదా:

సాధారణ వాక్యం	సంజ్ఞారూపం
x, y ల మొత్తం 5 అవుతుంది.	$x + y = 5$
x అనేది y కంటే 5 ఎక్కువ	$x = y + 5$
a కన్నా b అనేది 4 తక్కువ	$a - 4 = b$
x అనేది p కు 3 రెట్లు	$x = 3p$
p అనేది q లో 5వ వంతు	$p = \frac{q}{5}$

x యొక్క వర్గం x^2

S యొక్క ఘనం S^3

x కు రెండు రెట్లు కంటే y యొక్క 3 రెట్లు 5 ఎక్కువ అనగా $2x + 5 = 3y$

పై వాక్యాలాంటివి విద్యార్థి రాయగలిగే విధంగా మొదట ఉపాధ్యాయుడు తరగతి గదిలో సాధ్యమయినన్ని అభ్యాసం చేయించాలి.

చరరాశిని మనం ఇదేవిధంగా ఉపయోగిస్తామా? మరి ఏదైనా సందర్భంలో మరేవిధంగానే వాడుకుంటామా? ఈ సందర్భంలో లీలావతి గణితం నుండి ఒక సమస్యను పరిశీలిద్దాం.

సమస్య : "ఒక సంఖ్యను 3చే గుణించి ఆ లబ్ధంలోని $\frac{3}{4}$ వ భాగాన్ని ఆ లబ్ధానికి కలిపి ఆ మొత్తాన్ని 7చే భాగించగా వచ్చిన దాని నుండి ఆ భాగఫలంలోని $\frac{1}{3}$ వ వంతు తీసివేయగా వచ్చి దానిని దానిచేతనే గుణించి ఆ లబ్దం నుండి 52ను తీసివేసి వచ్చిన దానికి వర్గమూలం కనుగొని దానినుండి 8ని తీసివేసి 10చే భాగించగా 2 వచ్చింది. అయిన ఆ సంఖ్య ఏది ?

ఈ సమస్యను సాధించడానికి లీలావతి గణితంలో ఒక పద్ధతిని తెలిపినా మన ప్రస్తుత సందర్భంలో చరరాశిని కూడా ఉపయోగించి సాధించవచ్చేమో కదా! ఇలాంటి సమస్యలను ఉపాధ్యాయులమైన మనం ఎన్నిటినో సాధించి ఉంటాం. దీన్ని సాధిద్దామా మరి ?

దీన్ని సాధించే క్రమంలో కనుగొనవలసిన సంఖ్యను 'x' అనుకుంటాం కదా! ఆ 'x' పై సమస్యలో ఇవ్వబడినటువంటి నియమాలు మరియు ధర్మాలను అనువర్తింప జేసి 'x' యొక్క విలువను కనుగొంటాం.

ఇప్పటి వరకు మనం చర్చించిన దాని ఆధారంగా 'చరరాశి' అనేది వస్తువుల సంఖ్య, పొడవు, ద్రవ్యరాశి, కాలం, వైశాల్యం, చుట్టుకొలత, వయస్సు మొదలగు వాటి పరిమాణాలకు బదులుగా ఒక బీజీయ అక్షరాన్ని తీసుకొని ఆ బీజీయ అక్షరం చేత ప్రాతినిధ్యపరచబడింది.

చర్చనీయాంశం : బీజీయ సమాసం అంటే ఏమిటి? దాని ప్రాముఖ్యత ఏమిటి?

మనము ఇంతవరకు చరరాశులనుపయోగించి సాధారణీకరణాలు చేయడం, సమస్యలు సాధించడాన్ని చర్చించాం. ఆ సందర్భాలలో చరరాశులనుపయోగించి పలు వాక్యాలతో తెలపడం చూపాలి.

ఇపుడు ఒక సందర్భాని గమనిద్దాం.

సమస్య : ఒక దీర్ఘచతురస్రం నుండి దాని వెడల్పునకు రెట్టింపు విలువ గల అదే దీర్ఘచతురస్ర బాగాన్ని పొడవు నుండి తీసివేయగా ఏర్పడు ఆకారం యొక్క వైశాల్యం ఎంత ?

దీనిని సాధించడానికి ... సమస్యలో ఎలాంటి స్థిర విలువలు ఇవ్వలేదు. ఒకవేళ అసలు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు , వెడల్పు అనుకొన్నట్లయితే ప్రశ్న యొక్క జవాబు ఏమవుతుందో ఊహించగలమా ?

అందులో ఎన్ని పదాలుంటాయో చెప్పగలరా ?

బీజీయపదం అనగానేమి?
గుణకం, స్థిరపదం అనగానేమి?

విద్యార్థులకు బీజీయ సమాసాలతో సంకలన, వ్యవకలన ప్రక్రియలు చేసేటపుడు సజాతీయ, విజాతీయ పదాలను గుర్తించడం కష్టతర మవుతుంది. సజాతీయ, విజాతీయ పదాల ఆధారంగా సూక్ష్మీకరణ, కూడిక, తీసివేతలను చేయడంలోను తగినంత అభ్యాసం ఇవ్వాలి.

గణితంలో తెలియపరచవలసిన భావనలను చరరాశులు గుణకాలు మరియు స్థిరాశులు ఉపయోగించి తెలపడాన్ని బీజీయ సమాసం అంటారు.

ఉదా:
1. $3x^2 + 5x + 2$
2. $3x^2 + 5y +$
3. $6x^3 + 3y$
4. $\frac{1}{x} + x$

- పై ఉదాహరణలను గమనించి మీరు మరికొన్ని బీజీయ సమాసాలను తెలపండి.

ఈ బీజీయ సమాసాలకు గణితపరంగా గల అన్వయాలు ఏమేమి ఉండవచ్చు? పరిశీలిద్దాం.

ఆలోచించండి :

$x^2 - 2x$, $5 - 3x$, 1 లు భుజాలుగా గల త్రిభుజం ఏర్పడాలంటే 'x' ఏ సహజ విలువలకు అది సాధ్యమవుతుంది? ఏ సహజవిలువలకు సాధ్యం కాదు ?

పై సమస్యను పరిశీలించినపుడు మనకు ఒక విషయం గుర్తుకు వస్తుంది. అదేమిటి? ఒక త్రిభుజం ఏర్పడాలంటే ఆ త్రిభుజంలోని ఏవేని రెండు భుజాలు మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువ కావాలి.

పై సమస్యలోని త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలను గమనించినట్లయితే అవి బీజీయ సమాసాల రూపంలో ఉన్నాయి.

ఆ బీజీయ సమాసాలను సంకలనం చేయాలంటే ఒక విద్యార్థికి ఉండవలసిన జ్ఞానం ఏమిటి? ఖచ్చితంగా బీజీయ సమాసాలని సజాతి, విజాతి మరియు స్థిరపదాలను గుర్తించడం తెలియాలి. చాలా మంది విద్యార్థులకు ఈ సజాతి, విజాతి పదాల విచక్షణ లేకపోవడం వల్ల బీజగణితంలో చాలా సందర్భాలలో సమస్యల సాధనలో పొరపాట్లు చేస్తున్నారు.

బీజీయ సమాసాల గుణకారం చేయాలంటే విద్యార్థులు ఏమేమి తెలుసుకోవాలి? బీజీయ సమసాలలోని రకాలను మనం పరిశీలించినట్లయితే వారికి ఏకపది – ఏకపది, ఏకపది – ద్విపది, ద్విపది–ద్విపది, ద్విపది – త్రిపదిలను గుణించడం తెలియాలి.

ఉదా: ఏకపది – ఏకపది గుణకారం

$$(4x)(3x^2),\ (6x^2y)(-3xy^2),\ \left(-\frac{8}{3}x^3y^2\right)\left(\frac{9}{16}xy^3\right).$$

ఏకపది ద్విపది గుణకారం

$$3x(5x+4x^2),\ -6p(4p-8q)$$

ద్విపది – ద్విపది గుణకారం

$$(p^2+q)(-p-q^3),\ (4s^3-6t)(s^2-t^2)$$

ద్విపది – త్రిపది గుణకారం

$$(a+b+c)(a-b+c),\ (3p-q+r^2)(-p^2+q-r)$$

ద్విపది - ద్విపది, ద్విపది - త్రిపది గుణకారాలు పొరపాట్లు చేయకుండా సాధించాలంటే విద్యార్థికి మొదట తెలియాల్సినవి ఏమిటి?

విభాగన్యాయం ఏకపది - ఏకపది గుణకారం, బీజీయ సమాసాల సంకలన, వ్యవకలనాలు తెలియాలి.

చర్చనీయాంశం : బీజీయ సమీకరణం అంటే ఏమిటి?

బీజీయ సమాసం మరియు బీజీయ సమీకరణం ఒకటేనా? ఆలోచించండి. మనము ఇంతవరకు బీజీయ సమాసాలను వాటి చతుర్విధ ప్రక్రియలను గూర్చి చర్చించాం. ఇపుడొక సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఒక తండ్రి తన కొడుకుతో ఇలా అన్నాడు. "ఇపుడు నీవున్న వయస్సులో నేను ఉన్నపుడు నువ్వు పుట్టావు. ఇపుడు నా వయసు 38 సంవత్సరాలు. ఐతే 5 సం॥ల తర్వాత నీవయస్సెంత?

పై సందర్భాన్ని పరిశీలించండి. ఈ సమస్యను సాధించాలంటే మనం ఏమిచేయాలి? పై సమస్యను క్షుణ్ణంగా చదివినపుడు కొడుకు ప్రస్తుత వయస్సు తెలియదు కాబట్టి 'x' సం॥లు అనుకుంటాం. ఇపుడు తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు 38 సం॥లు కదా. అనగా

$(38 - x)$ సం॥ల క్రితం కొడుకు పుట్టాడని అర్థం.

ఈ $(38 - x)$ సం॥లకు మరియు కొడుకు వయస్సు 'x' సం॥లకు ఏదైనా సంబంధం ఉందా? అవును ఈరెండూ కూడా కొడుకు ప్రస్తుత వయస్సును సూచిస్తున్నాయి. కాబట్టి.

$38 - x = x$ అని రాయవచ్చుకదా.

ఇక్కడ రెండు బీజీయ సమాసాలను సమానత్వ గుర్తును పయోగించి తెలపవలసి వచ్చింది. అనగా సమానం (=) గుర్తుకు ఇరువైపులా రెండు బీజీయ సమాసాలను రాసాం. ఇలా రాసిన దానిని ఏమంటాం? బీజీయ సమీకరణం అని అంటుంటాం కదా.

ఇక్కడ కొన్ని సమీకరణాలను గమనిద్దాం.

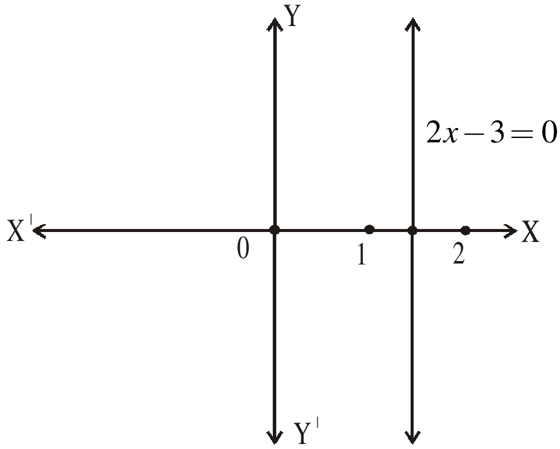
$2x - 3 = 0$ $\qquad$ $\frac{1}{x} + x = 2 \ (x \neq 0)$

వీటిని గమనించినపుడు వాటి మధ్యగల సారూప్యత ఏమిటి? అవి రెండూ ఒకే చరరాశిని కలిగి ఉన్నాయి. అంతమాత్రాన అవి ఒకే రూపాన్ని ప్రాతినిధ్యపరుస్తాయా? ఆలోచించండి.

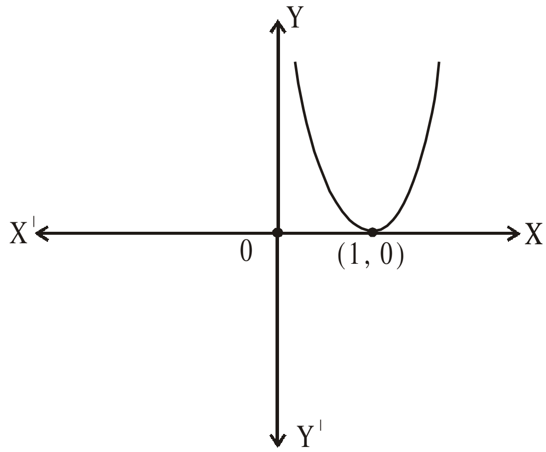
మొదటి బీజీయ సమీకరణాన్ని గమనిస్తే దానిని ఏకచరరాశి గల రేఖీ సమీకరణం అంటాం. మరి రెండవ దానిని ఏకచరరాశి గల రేఖీయ సమీకరణం అని అనలేం. ఎందుకని ?

వీటి రేఖాచిత్రాలు గీయగలరేమో ప్రయత్నించండి.

$2x-3=0$ యొక్క రేఖా చిత్రం



$\frac{1}{x}+x=2$ యొక్క రేఖా చిత్రం $(x \neq 0)$



పై రెండు రేఖాచిత్రాలను గమనించినపుడు $2x-3=0$ మరియు $\frac{1}{x}+x=2$ ఈ రెండు సమీకరణాలు ఏక చరరాశిని కలిగి ఉన్నవి. అయినా వాటి లక్షణాలు వేరువేరుగా ఉన్నాయి. కావున

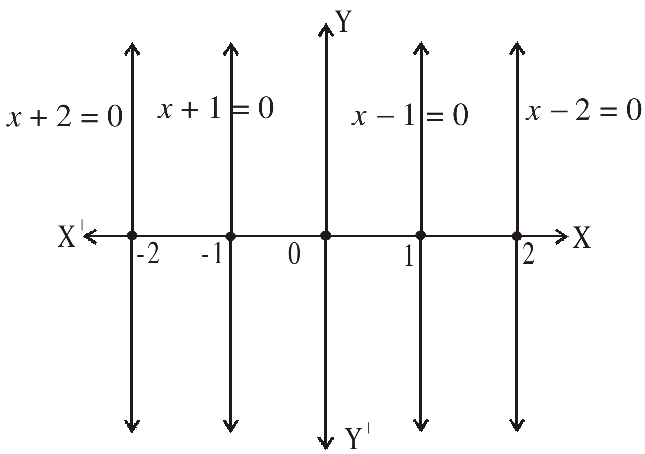
$ax+b=0$ రూపంలో నున్న ఏ సమీకరణాన్నైనా మనం రేఖీయ సమీకరణంగా వ్యవహరిస్తుంటాం. ఈ క్రింది గ్రాఫులను గమనిద్దాం.

1. $x-2=0$

   $x-1=0$

   $x+1=0$

   $x+2=0$

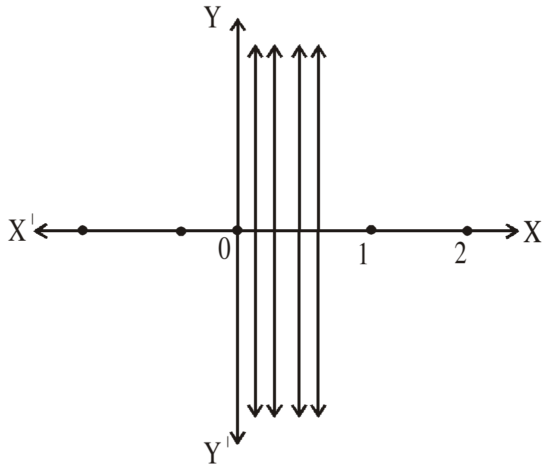


2. $2x - 1 = 0$

$3x - 1 = 0$

$4x - 1 = 0$

$5x - 1 = 0$



పై గ్రాఫులను పరిశీలించండి.

మొదటి సందర్భంలో చరరాశి గుణకం స్థిరంగా ఉండి స్థిరపదం మారినపుడు ఏమి గమనించారు !

రెండవ సందర్భంలో స్థిరపదం స్థిరంగా ఉంచి, చరరాశి గుణకం మారుతున్నపుడు ఏర్పడిన గ్రాఫుల నుండి ఏమి గమనించారు?

రేఖీయ సమీకరణాల రూపానికి మరియు వాటి సాధనకు ఏమైనా సంబంధం ఉందా?

ఏకచరరాశిలోని రేఖీయ సమీకరణాలకు సంబంధించి సాధనలు మనకు నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను సాధించడానికి ఉపయోగపడుతుంటాయి. ఆ క్రమంలో ఆ సమస్యను అవగాహన చేసుకొని సంజ్ఞారూపంలో మార్చడం అనేది తెలియాలి.

రేఖీయ సమీకరణాలన్నీ ఏకచరరాశినే కలిగి ఉంటాయా? ఇంకా ఎక్కువ చరరాశులు కలిగి ఉండే అవకాశం ఉందా?

క్రింది సమస్యను పరిశీలిద్దాం.

ఒక ప్రదర్శన నిర్వహిస్తున్న యజమాని రెండు రకాల టికెట్లను అమ్ముతున్నారు. పిల్లలకు 30లు పెద్దలకు 50లు. అతడు మొత్తం 225 టికెట్లు అమ్మినందుకు అతనికి రూ. 8250లు వచ్చిన ఆ ప్రదర్శన చూసి పిల్లలెందరు, పెద్దలెందరు?

పై సమస్యను సాధించడానికి మీరేం చేస్తారు. మామూలుగానే పిల్లల సంఖ్యను x, పెద్దల సంఖ్యను y గా అనుకొని

$x + y = 225$ మరియు $= 30x + 50y = 8250$లుగా తీసుకొని సాధిస్తాం కదా! మరి ఈ సమీకరణాల్లో రెండు చరరాశులున్నాయి కదా! మరి ఈ సమీకరణాలను ఏమంటారు ?

ఈ రెండు సమీకరణాలలో కూడా x, y లు మనుషుల సంఖ్యను తెలియజెప్తున్నాయి. ఒక సమీకరణంలోని x, y లు మనుషుల సంఖ్యను ప్రాతినిధ్యపరచి మరొక సమీకరణంలోని x, y లు వస్తువుల సంఖ్యను సూచిస్తే అలాంటి సమీకరణాలను సాధించడం సబబేనా? $x + y = 225$ సమీకరణానికి సాధనలెన్ని ఉండవచ్చు? చాలా ఉంటాయి కదా.

కావున రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించడానికి మనకు కనీసం రెండు రేఖీయ సమీకరణాలు అవసరమవుతాయి. ఆరెండు రేఖీయ సమీకరణాలలో x, y లు ఒకే అంశాలను ప్రాతినిధ్య పరుస్తాయి. కావున అలాంటి రేఖీయ సమీకరణాలను రెండు చరరాశుల్లో రేఖీయ సమీకరణ యుగ్మం అంటారు.

ఈ రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించేటపుడు ముఖ్యంగా అందులోని చరరాశులు ఏ సంఖ్యాసమితికి చెందుతాయి. అని అంశాన్ని దృష్టిలో పెట్టుకొని సాధించాలి.

పై ఉదాహరణలో x, y లు ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యాసమితికి చెందుతాయి.

సాధారణంగా రేఖీయ సమీకరణాన్ని యుగ్మాలు $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$

రూపంలో ఉంటాయని మనకు తెలుసు.

పై సమీకరణాల సాధన $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ల స్వభావంపై మరియు వాటిమధ్య సంబంధంపై ఆధారపడి ఉంటుందా?

క్రింది రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు గమనించండి.

(i) $3x + y = 11$	(ii) $2x + y = 3$
$4x - 3y = 6$	$3x + 2y = 6$
$5x - 2y = 11$	$x + 4y = 12$

(i) లోని సమీకరణాల రేఖా చిత్రంలు(గ్రాపులు) (ii) లోని సమీకరణాల రేఖాచిత్రాలు (గ్రాపులు) ఒకే గ్రాఫ్ గీయండి.

పై గ్రాపుల ద్వారా ఏమి తెలుసుకున్నారు?

వీటిల్లో రెండు గ్రాఫులలో గమనించినట్లయితే అన్నీ రేఖలు ఒక ఉమ్మడి బిందువు గుండా వెళుతున్నట్లు గమనించారు కదా. ఆ గ్రాఫుల నుండి ఆ బిందువులు గుర్తించండి. ఆ ఉమ్మడి బిందువులు ఆయా సమీకరణాలకు ఉమ్మడి సాధన అవుతుంది. వీటి చరరాశుల గుణకాలు గమనించినచో అవి $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ గా ఉంటాయి. వీటిని సంగత సమీకరణాలు అంటుంటాం.

క్రింది సందర్భాన్ని గమనిద్దాం.

గోపి తను రెండు షాపులలో కొన్న పెన్నులు మరియు పెన్సిళ్ళ గూర్చి ఈ విధంగా చెప్పాడు. ఒక పెన్సిల్ ధర రూ. 5 మరియు ఒక పెన్ను ధర రూ. 10లు మరియు నేను మొదట షాపులో $10x + 5y = 35$ అయ్యేవిధంగా రెండవ షాపులో $20x + 10y = 100$ అయ్యేవిధంగా మొదటి షాపులో ఎన్నెన్ని పెన్సిల్లు మరియు పెన్నులు (అవన్ని రెండోషాపులో) కొన్నాను. అయిన ఒక్కొక్క షాపులో ఎన్నెన్ని పెన్సిల్లు మరియు ఎన్నెన్ని పెన్నులు కొన్నాను ?

ఇపుడు ..... గోపి చెప్పిన సమస్యకు సమాధానాన్ని మనం చెప్పగలమా? ఈ రెండు సమీకరణాల్లో x, y గుణకాలు అనుపాతంలో ఉండడం గమనించవచ్చు.

అలాగే కింది ఉదా॥లను చూద్దాం.

$x + y = 5$

$2x + 2y = 5$

$3x + 3y = 5$

$4x + 4y = 5$

పై సమీకరణాలకు రేఖాచిత్రాలు ఒకే గ్రాఫ్ షీటుపై గీయండి.

రేఖీయ సమీకరణాల్లోని చరరాశుల గుణకాలు అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రేఖీయ సమీకరణాలకు సాధనలు ఉండవని మనం గమనించవచ్చు. ఈ విధంగా ఉన్న రేఖీయ సమీకరణ యుద్ధాలను అసంగత రేఖీయ సమీకరణాలు అంటుంటాం.

పై సమీకరణాలను గమనించినట్లయితే

ఏవేని, రెండు సమీకరణాలు గుణకాలు

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అని తెలుస్తుంది.

కింది సమీకరణాలు గమనించండి.

$x + y = 5$

$2x + 2y = 10$

$3x + 3y = 15$

పై రేఖీయ సమీకరణాలకు ఒకే గ్రాఫుషీటులో రేఖాచిత్రాలను గీయండి.

పై గ్రాఫు నుండి ఏమి గమనించారు?

రేఖీయ సమీకరణాల్లోని చరరాశుల గుణకాలు మరియు స్థిరపదాలు ఒకే అనుపాతంలో ఉన్నాయి. కావున ఇవి వేరు వేరు రూపాల్లో నున్నా ఇవన్నీ ఒకేరేఖను సూచిస్తాయి. వీటి సాధనలు ఏమవుతాయి? ఒకే సాధన ఉంటుందా? అనేక సాధనలున్నాయా? వీటిని గమనించినట్లయితే వాటిలోని గుణకాలు $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ గా గమనించవచ్చు.

ఇలాంటి రేఖీయ సమీకరణాలను పరస్పర ఆధారిత రేఖీయ సమీకరణాలు అంటారు. వీటికి ఏకైక సాధన లేనప్పటికీ అనంతసాధనలుంటాయి. అంటాం కాబట్టి వీటిని కూడా సంగత సమీకరణాలుగా పరిగణిస్తాం.

పై చర్చను బట్టి మనకేమి అర్ధమయింది. రెండు చరరాశులలోని రేఖీయ సమీకరణ యుగ్మాలలో చరరాశుల గుణకాల లక్షణాన్ని బట్టి వాడే సాధనలుంటాయని తెలుస్తున్నది.

చర్చనీయాంశం : వర్గసమీకరణం అనగానేమి ?

లీలావతి గణితం నుండి ఒక సమస్య గమనిద్దాం.

సమస్య : ఒక కొండపై ఒక కోతుల సమూహం ఉన్నది. ఆ సమూహంలో నుండి దానిలో 8వ వంతుకు వర్గంనకు సమానమైన సంఖ్యలో కోతులు అడవిలోకి వెళ్ళాయి. మిగిలిన 12 కోతులు కొండపై నుండి చూస్తున్నాయి. అయిన ఆ కోతుల సమూహంలోని మొత్తం కోతుల సంఖ్య ఎంత?

పై సమస్యను సాధించడానికి సమూహంలోని కోతుల సంఖ్యను 'x' అనుకొని ఆ క్రమంలో సాధనను మొదలుపెడతాం.

ఈ సందర్భంలో $\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$ గా సంజ్ఞారూపంలో సమస్యను రాస్తాం. సోపానాలను అనుసరించి దీన్ని సాధిస్తూ వుంటే

$$\frac{x^2}{64}+12=x \Rightarrow x^2-64x+768=0$$

గా రూపాంతరం చెందింది. ఈ విధంగా $ax^2+bx+c=0$ రూపంలో ఉండే సమీకరణాలను వర్గసమీకరణాలంటారని మనకు తెలుసు. కానీ తరగతి గదిలో $a\neq 0$ అనే విషయం చర్చించడాన్ని ఒక్కోసారి విస్మరిస్తుంటాం. మరి ఇలాంటి సమీకరణాలను సాధించడానికి మనకున్న పద్ధతులు ఏవి ?

మరి వర్గసమీకరణాలను సాధించే ఎన్ని పద్ధతులు ఉన్నాయో ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మన సిలబస్ ఆధారంగా విద్యార్థికి కనీసం ఈ మూడు పద్ధతులలో వర్గసమీకరణం సాధించడం తెలియాలి.

1. కారణాంక పద్ధతి

2. వర్గం పూర్తి చేయుట ద్వారా

3. సూత్రం ద్వారా

ఇది గాక రేఖీయ చిత్రం (గ్రాఫు) ద్వారా కూడా కనుగొనవచ్చును. కారణాంక పద్ధతి కాకుండా వర్గం పూర్తిచేయుట ద్వారా, మరియు సూత్రం ద్వారా ఒక వర్గ సమీకరణానికి మూలాలు కనుగొనడం అన్నింటికీ సులభమవుతుంది.

మూలాలు స్వభావాన్ని తెలపడానికి $b^2 - 4ac$ విలువనే ఎందుకు పరిగణించాలి? దీన్ని విచక్షణి అని ఎందుకంటారు?

ఈ సందర్భంలో మనం వర్గబహుపదుల గూర్చి చర్చించాల్సిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. ఇంతకు ముందు మనం రేఖీయ బహుపది లక్షణాలను గ్రాఫు ద్వారా పరిశీలించాం. ఇక వర్గబహుపది విషయానికి వచ్చినట్లయితే ప్రతీ వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో ఉంటుంది. ఇచ్చట $a \neq 0$.

కొన్ని వర్గబహుపదుల స్వభావాన్ని గమనిద్దాం.

(i) $y = x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$

$y = \frac{1}{4}x^2$

$y = \frac{1}{10}x^2$

$y = -x^2$

పై వాటి గ్రాఫులను ఒకే షీటుపై గీసి గమనించండి.

(ii) $y = x^2 + 1$

$y = x^2 + 2$

$y = x^2 - 1$

$y = x^2 - 2$

వీటి గ్రాఫులను ఒకే షీటుపై గీసి గమనించండి.

రెండు గ్రాఫులను పరిశీలించినట్లయితే మొదటి గ్రాఫు నుండి రెండు విషయాలు తెలుస్తున్నాయి. కేవలం x^2 పదాన్ని మాత్రమే కలిగి ఉన్న వర్గబహుపదుల రేఖాచిత్రాలన్నీ మూలబిందువు శీర్షంగా గల పరావలయంగా ఉంటాయి. మరియు x^2 గుణకం విలువ ఒకటి నుండి సున్నాకు తగ్గుతున్నా కొద్దీ పరావలం యొక్క ఆవరణ ప్రాంతం పెరుగుతుంది అని తెలుస్తుంది.

రెండవ గ్రాఫు నుండి ఏమి తెలుస్తుంది.

x^2 గుణకం స్థిరంగా ఉండి దానికి కలపబడిన స్థిరాంకం విలువ మారుతున్న కొద్దీ పరావలన శీర్షస్థానం మారుతుంది. కాని పరావలయం ఆవరణ ప్రాంతం స్థిరంగా ఉండడం గమనించవచ్చు.

పై చర్చను బట్టి 'x^2' గుణకం మరియు స్థిర సంఖ్యలు ఒక వర్గబహుపది యొక్క ఆకారాన్ని నిర్ణయిస్తాయని చెప్పవచ్చు. ఒక వర్గబహుపది యొక్క విలువ అంటే ఏమిటి? వర్గబహుపది శూన్యాలు అంటే ఏమిటి?

ఉదాహరణకు $x^2 - 5x + 6$ అనే బహుపది తీసుకున్నామనుకున్నాం అనుకోండి.

$x = 0$ వద్ద ఈ బహుపది విలువ ఏమి కావచ్చు ?

$y = x^2 - 5x + 6 = 1^2 - 5(1) + 6 = 2$

అంటే $x = 1$ వద్ద ఇచ్చిన బహుపది విలువ 2 అవుతుంది. ఈ విధంగా ప్రతీ వర్గబహుపదికి ఒక్కొక్క స్థానం వద్ద ఒక్కొక్క విలువ ఉంటుంది. ఒక్కొక్క వర్గబహుపది విలువకు అనుగుణమైన విలువలు ఎన్ని వ్యవస్థితం కావచ్చు? ప్రతి వర్గ బహుపది ఒక పరావలయ రూపాన్ని పొందుతుంది. కాబట్టి దానికి అనుగుణమైన x విలువలు రెండేసి వ్యవస్థితమవుతాయి.

వర్గబహుపది శూన్యం అంటే ఏమిటి?

పైన తీసుకున్న వర్గబహుపది $y = p(x) = y = x^2 - 5x + 6$; $x = 3$; $x = 2$ యొక్క విలువ ఏయే సందర్భాలలో సున్నా వస్తుందో ఆయా 'x' విలువలను ఆ వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలు అంటాం. ఈ సందర్భంలో $x = 2$ వద్ద $y = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$. మరియు $x = 3$ వద్ద $y = 3^2 - 5(3) + 6 = 0$. అంటే $x = 2$ మరియు $x = 3$ వద్ద ఇచ్చిన బహుపది విలువ '0' (శూన్యం) అవుతుంది. కావున ఈ విలువలను ఆ వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలంటాం.

పై బహుపది $y = x^2 - 5x + 6$, ల వద్ద శూన్యమగుచున్నది, $p(3) = 0$, $p(2) = 0$ ఈ రేఖా చిత్రాన్ని పరిశీలించిన (3, 0), (2, 0) వద్ద X-అక్షాన్ని ఖండిస్తుంది.

విపర్యయంగా, రేఖ X-అక్షాన్ని ఏ x–నిరూపకము వద్ద ఖండిస్తుందో అని ఆ బహుపది శూన్య విలువలవుతాయి.

బీజగణితమనేది అత్యున్నత అమూర్త భావనలతో నిండి ఉన్నను గణితంలోని అన్ని రంగాలకు అంకగణితం, జ్యామితి, దత్తాంశ నిర్వహణ, క్షేత్రమితి మొదలగు వాటికి సంబంధించిన భావనల అవగాహనకు మరియు నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనకు మరియు భౌతిక, రసాయన, ఆర్థిక శాస్త్రలలో భావనల అవగాహనకు సమస్యల సాధనకు ఉపయోగపడ్తుంది.

మరికొన్ని సర్వసమానతలు (Identities)

1. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$
$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2$$
$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = (2ab)^2$$
$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

2. $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$

$$= (a^2+ b^2)(x^2 + y^2)$$
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

ఇదే విధంగా మరికొన్ని ప్రయత్నించండి.

రిఫరెన్స్ గ్రంథాలు

1. Hall & Knight - Algebra for beginners
2. Bernard & Child - Higher algebra
3. V. Krishna Murthy - Challanges and thrill of pre college Mathematics (New age Publications)
4. NCERT 8th, 9th and 10th Class Text Books.

రేఖాగణితం

I. ఉపోద్ఘాతం

జామెట్రీ అనే పదం జియో మరియు మెట్రాన్ అనే గ్రీకు పదాల కలయిక వలన ఏర్పడింది. వీటి అర్థం. జియో అనగా భూమి మరియు మెట్రాన్ అనగా కొలత. కాబట్టి జామెట్రీ అనేది భూమి యొక్క కొలత గురించి అధ్యయనం చేసే శాస్త్రము.

- రేఖాగణితం అనేది కొలతలు మరియు వస్తువులను పోల్చడానికి అదేవిధంగా ఆకారాలను గీయడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
- నిజజీవితంలో రేఖాగణితం యొక్క ఉపయోగం చాలా ఉంది.
- డ్రాయింగ్‌లో కూడా రేఖాగణిత నియమాలునే ఉపయోగిస్తారు.

విద్యార్థికి రేఖాగణిత ప్రాముఖ్యత ఆధారముగా కావలసిన మౌలికభావనలు, మౌలిక అంశాలు మరియు రేఖాగణితములోని వివిధ తరగతుల వారీగా స్థాయి ప్రకారం విభజన చేసి 6 నుండి 10వ తరగతుల వరకు ప్రవేశపెట్టడం జరిగినది. తరగతుల వారీ పాఠ్యాంశముల విభజనను మరొకసారి పరిశీలిద్దాం.

II. రేఖాగణితములోని అంశాలు తరగతుల వారిగా విభజన

6th	7th	8th	9th	10th
ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు: బిందువు, రేఖాఖండం, సరళరేఖ, కిరణం, వక్రము, బహుభుజాలు కోణము, త్రిభుజము, చతుర్భు జము, వృత్తము. రేఖలు మరియు కోణముల కొలతలు రేఖాఖండం యొక్క కొలత,	**రేఖలు – కోణములు** కోణాల జతలు పూరక కోణాలు సంపూరక కోణాలు ఆసన్న కోణాలు రేఖీయ ద్వయము శీర్షాభిముఖకోణాలు తిర్యగ్రేఖలు – వాటిచే ఏర్పడు కోణాలు – రకాలు సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ త్రిభుజం–ధర్మాలు త్రిభుజాలు రకాల త్రిభుజాల భుజాల మధ్య సంబంధం త్రిభుజం – ఎత్తులు – మధ్యగత రేఖలు త్రిభుజ – ధర్మాలు – మూడు కోణాల మొత్తం త్రిభుజం – బాహ్యకోణం	**జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ** • సర్వసమానత్వం • ఆకారాల సర్వసమానత్వం సరూపత • భ్రమణము • సరూపత అనువర్తనాలు • సరూప విస్తరణలు • సరూప విస్తరణల నిర్మాణం • సౌష్ఠవం • భ్రమణ సౌష్ఠవం • బిందు సౌష్ఠవం • సౌష్ఠవం అనువర్తనాలు.	**సరళరేఖలు మరియు కోణాలు :** జ్యామితిలోని మౌళిక పదాలు, ఖండన రేఖలు మరియు ఖండించుకోని రేఖలు, మిళితరేఖలు కోణాలు జతలు, రేఖీయ ద్వయ కోణాల స్వీకృతం, ఖండన రేఖలతో ఏర్పడే కోణాలు, సరళరేఖలు త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం ధర్మం **త్రిభుజాలు :** త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవడానికి నియమాలు • భు.కో.భు. • కో.భు.కో. • కో.కో.భు.	**సరూప త్రిభుజాలు :** • సరూప పటాలు • త్రిభుజాల సరూపత • ప్రా.అ.సి.(థేల్స్) • రేఖాఖండ విభజన • త్రిభుజాల సరూపత నియాలు • కో.కో.కో. • భు.భు.భు. • భు.కో.భు. • సరూప త్రిబుజాల వైశాల్యం • పైథాగరస్ సిద్ధాంతం **వృత్తాలకు స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదన రేఖలు** • స్పర్శరేఖలు • వృత్తానికి స్పర్శరేఖ నిర్మాణం • స్పర్శరేఖ పొడవు

6th	7th	8th	9th	10th
	త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం **రేఖాఖండాల సర్వసమానత్వం** **త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం – నియమాలు** • భు.భు.భు. నియమం • భు.కో.భు. నియమం • కో.భు.కో.నియమం • లం.క.భు. నియమం **చతుర్భుజాలు :** • చతుర్భుజంలో అంతర, బాహ్య బిందువులు • కుంభాకార, పుటాకార చతుర్భుజాలు • చతుర్భుజంలోని కోణాలు మొత్తం • చతుర్భుజాల రకాలు • టాన్‌గ్రామ్‌తో చిత్రాలను రూపొందించడం. **సౌష్ఠవం:** • సౌష్ఠవ రేఖ లేక సౌష్ఠవాక్షము • క్రమబహుభుజల సౌష్ఠవ వాక్షములు • భ్రమణ సౌష్ఠవము • భ్రమణ సౌష్ఠవ కోణము • భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం • భ్రమణ సౌష్ఠవము • రేఖీయ సౌష్ఠవము • భ్రమణ సౌష్ఠవము		**త్రిభుజం యొక్క కొన్ని ధర్మాలు** • భు.భు.భు. • లం.క.భు. **త్రిభు. అసమానత్వములు** **చతుర్భుజాలు** • చతుర్భుజాలు – ధర్మాలు – రకాలు • సమాంతర చతుర్భుజీ ధర్మాలు • జ్యామితీయ ప్రవచనాలు • త్రిభుజ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతము **వృత్తములు :** • వృత్తం మీద ఏదేని బిందువు వద్ద జ్యా చే ఏర్పర చు కోణం • వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం • వృత్తాన్ని నిర్ధారించే మూడు బిందువులు • వృత్తచాపము ఏర్పరిచే కోణం • ఒకే వృత్తఖండం లోని కోణాలు • చక్రీయ చతుర్భుజం	• ఏదైనా బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయనగు స్పర్శ రేఖలు • వృత్తానికి బాహ్య బిందువు నుండి గీయనగు స్పర్శరేఖలు • ఛేదన రేఖలు • ఛేదన రేఖతో ఏర్పడు వృత్త ఖండం • వృత్త ఖండం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనడం

నిర్మాణాలు

6th	7th	8th	9th	10th
ప్రాయోగిక జ్యామితి – రేఖాఖండం . ఇచ్చిన కొలతలో రేఖఖండం నిర్మించడం . స్కేల్ . వృత్తలేఖిని . వృత్త నిర్మాణము . లంబరేఖల నిర్మాణము . రేఖకు, బిందువు ద్వారా రేఖాఖండానికి లంబసమద్వి ఖండన రేఖ రేఖపై లేని బిందువు నుండి రేఖకు లంబరేఖ గీయడం కోణమాని ద్వారా కోణము నిర్మాణం. . కొలత తెలియని కోణమునకు సమానమైన కోణమును నిర్మించుట. . కోణ సమద్విఖండన రేఖ నిర్మాణం. . ప్రత్యేక కోణాల నిర్మాణం. . వృత్తలేఖిని సహాయంతో 30^0, 90^0 నిర్మాణము	త్రిభుజాల నిర్మాణంలు . 3 వైపులు . రెండు భు. – మధ్యకోణం . రెండు కోణాలు – మధ్యకోణం . లంబకోణ త్రి కర్ణం – భుజం . రెండు భు–వాటిమధ్య లేని కోణం.	చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు . చతుర్భుజాలు – వాటి ధర్మాలు . వృత్తలేఖిని – 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0 నిర్మాణం . చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు – S.S.S.S.A - S.S.S.S.D - S.S.S.D.D - S.A.S.A.A (రెండు ఆసన్న భుజాలు & 3 కోణాలు) -S.A.S.A.S. – ప్రత్యేక రాంబస్ నిర్మాణం చతుర్భుజ నిర్మాణాలు	జ్యామితీయ నిర్మాణాలు : . దత్తరేఖ ఖండానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖ గీయటం . దత్త కోణా సమద్విఖండన రేఖ నిర్మించటం . ఇచ్చిన కిరణం యొక్క తొలి బిందువు వద్ద 60^0 కోణం నిర్మించటం త్రిభుజ నిర్మాణాలు (ప్రత్యేక సందర్భాలు) – భూమి, భూకోణం మరియు రెండు భుజాల మొత్తం ఇస్తే. – భూమి, భూకోణం మిగిలిన రెండు భుజాల బేధం ఇస్తే – త్రిభుజ చుట్టుకాలము, రెండు భూకోణాలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజ నిర్మాణం. – దత్తజ్యా, దత్తకోణాన్ని కలిగి ఉండే వృత్త ఖండం నిర్మాణం	సరూప త్రిబుజాలు . సరూప త్రిభుజ నిర్మాణం. వృత్తాలు :– . వృత్తానికి బాహ్య బిందువు నుండి స్పర్శరేఖల నిర్మాణం.

జ్యామితికి మూలం తార్కిక ఆలోచన

- గణితంలోని శాఖలలో కెల్లా అందమయినది రేఖాగణితం.
- రేఖాగణితంలో ముఖ్యమయిన అంశం. ప్రతి సోపానానికి ఒక తార్కిక కారణం. కాబట్టి రేఖాగణితమును నేర్చుకొనే క్రమంలో ఏదో కేవలం కొన్ని సిద్ధాంతాలు, స్వీకృతాలు బట్టీపట్టే ధోరణిలో కాకుండా ప్రతి అంశము వెనుక గల కారణముతో సహా నేర్చుకోవాలి.

నాగరికత అభివృద్ధిలో యూక్లిడ్ జ్యామితి మానవుల అవసరాలకు సరిపోలేదు. విశ్వాన్ని వివరించుటకు సరళరేఖలు, రేఖలుగా మారాయి.

ఋజువుగా ఉండే రేఖ గోళీయ జ్యామితి గరిష్ఠవృత్తాలుగా, వక్రతాలవైపు వక్రాలుగా మారాయి.

Factorial జ్యామితిలో రేఖలు ఋజువుగా లేక వక్రముగా నుండవు. అవి అనంతమైన సూక్ష్మ (Wiggles) కంపన బిందువులు.

III. జ్యామితిలోని మౌళిక భావనలు:

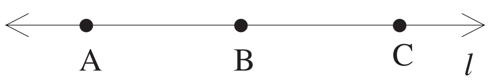
మౌళికంగా గణిత వ్యవస్థ ప్రాథమిక మూలకములు, అనిర్వచనీయ పదాలు, నిర్వచిత పదాలు, స్వీకృతాలు మరియు సిద్ధాంతాలను కలిగి ఉండును.

వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థలో సంఖ్య మరియు సమితులు అనిర్వచనీయ పదాలు గ్రహించబడ్డాయి.

అదే విధంగా జ్యామితిలో బిందువు, రేఖ మరియు తలములను అనిర్వచిత పదాలుగా స్వీకరిస్తాము. అంటే వాటిని అంతఃబుద్ధితో మాత్రమే వ్యక్తపర్చగలము లేదా భౌతిక నమూనాల సహాయంతో ఊహించగలము.

పదునుగా చెక్కిన పెన్సిల్‌తో కాగితంపై గుర్తించిన చుక్క వాక్యము చివర ఉంచు పూర్తి విరామ చిహ్నము, రెండువైపులా పట్టుకొని లాగి అనంతము సాగదీయబడిన దారము 'రేఖను' మరియు టేబుల్ యొక్క ఉపరితలం. 'తలము'ను ఊహించుటకు ఉపయోగపడతాయి.

- 'బిందువుల'ను A, B, C ....., Y, Z ఆంగ్లభాషలోని పెద్ద అక్షరాలతో సూచిస్తారు.
- 'రేఖను' దానిపైగల రెండ విభిన్న బిందువులచే సూచిస్తారు.



ఉదా : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{BA}$

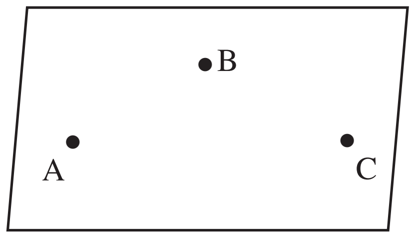
లేదా రేఖను ఆంగ్లభాషలోని చిన్న అక్షరములైన *l, m, n* .... లతో సూచిస్తాము.

- తలమును గ్రీకు భాషలోని చిన్న అక్షరాలైన α, β, γ ...... లతో సూచిస్తారు.

లేదా

ఆ తలంలో ఒకే రేఖ పై లేని

మూడు బిందువులు A, B, C తో తలము ABC గా సూచిస్తారు.



రూలర్ స్వీకృతము :

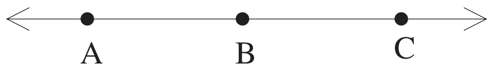
ప్రతిరేఖకు, ఆ రేఖపై గల ఏ రెండు జంతువుల మధ్య దూరమైనను వాటి సంబంధిత సంఖ్యల భేదము యొక్క పరమ మూల్యము అగునట్లు, బిందువులకు మరియు వాస్తవ సంఖ్యల మధ్య అన్వేక సంబంధము ఉండును.

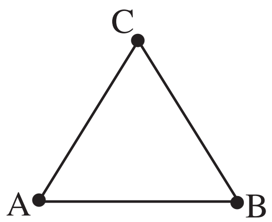
$AB = |-3 - (-1)| = |-3 + 1| = |-2| = 2$

$CD = |2 - 0| = |2| = 2$

$AD = |2 - (-3)| = |2 + 3| = |5| = 5$

A, B, C అనే విభిన్న బిందువులు $AC + CB = AB$ (అగునట్లుగా) 'C' బిందువు AB బిందువుల మధ్య గల బిందువు A – C – B లేదా B – C – A గా రాస్తారు.





పటముల

$AC + CB = AB$

కాన C, A, B ల

$AC + CB > AB$

కావున C, A, B ల మధ్య బిందువు

రేఖాఖండము :

రెండు విభిన్న బిందువులు మరియు వాటి మధ్యగల అన్ని బిందువుల సమితిని 'రేఖాఖండం' అంటాము.

A, B లు చివరి బిందువులుగా గల రేఖాఖండం $\overline{AB}$ లేదా $\overline{BA}$ రేఖాఖండపు రెండు చివరి బిందువులు మధ్యదూరం దాని యొక్క పొడవు అవుతుంది.

$\overline{AB}$ యొక్క పొడవు $= AB$

కిరణము :

A, B లు రేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ పై గల రెండు విభిన్న బిందువులు. A బిందువు నుండి B బిందువు ద్వారా పోవు పై గల అన్ని బిందువుల సమితిని AB కిరణము అని అందురు.

AB కిరణాన్ని $\overrightarrow{AB}$ తో సూచిస్తారు.

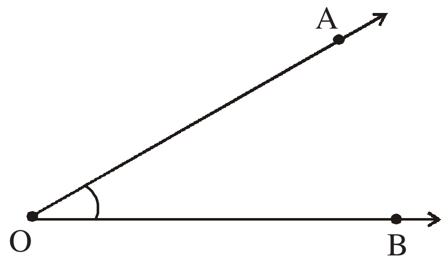
ఇక్కడ A ను తొలి బిందువు అంటారు.

కోణము :

ఒకే తొలి బిందువు గల సరేఖీయాలు కాని, రెండు కిరణాల సమ్మేళనాన్ని కోణము అంటారు.

$\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} = \angle AOB$ లేదా

$\angle BOA$



ఇక్కడ 'O' ను కోణశీర్షం అని, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}$ లను కోణ భుజాలు అని అంటాము.

జ్యామితిలో నిరూపణలు

రేఖాగణితం బాబిలోనియన్ల, ఈజిప్టియన్‌ల "మొదట నియమాల" (Rule of thumb) తో ప్రారంభమైనది. వీటితో వారు వైశాల్యాలు, ఘనపరిమాణాలు కనుగొనేవారు. వ్యవసాయ క్షేత్రాలను కొలిచెవారు. వీరు యత్నదోష పద్ధతి (Trail and Error) ఉపయోగించేవారు.

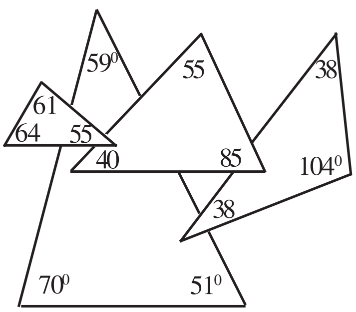
600 BCE లో థేల్ గణితంలో "పరికల్పనలు" చెప్పెడు. తరవాత తార్కికంగా నిరూపించుటను సమర్థించడంలో గణితంలో నిరూపణకు ప్రాముఖ్యత వచ్చింది.

అనుగమన / నిగమన పద్ధతులు

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలించి తార్కికంగా పరికల్పనలు చేయుట అనుగమన హేతువాదము. ఉదాహరణకు త్రిభుజములోని కోణములను కొలిచి "త్రిభుజములోని కోణముల కొలతల మొత్తం 180^0" అని చెప్పుట పరికల్పన.

అనుగమన హేతుపద్ధతి

పరిశీలన ⟶ సామాన్యీకరణ

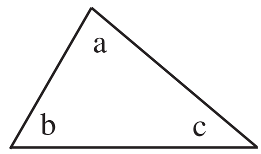


$64^0 + 61^0 + 55^0 = 180^0$

$70^0 + 59^0 + 51^0 = 180^0$

$40^0 + 55^0 + 85^0 = 180^0$

$38^0 + 38^0 + 104^0 = 180^0$

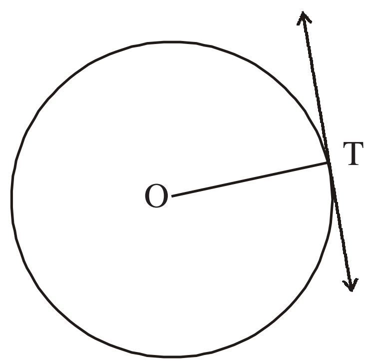


పరికల్పన అన్ని Δలలో

$a + b + c = 180^0$

దిగువ అనుగమన పద్ధతిన పరికల్పనలు చేయుటకు ఉదాహరణముగా రెండు కృత్యాలు సూచించబడినవి.

కృత్యము :



సోపానము (1) O కేంద్రంగా వృతాన్ని నిర్మించండి.

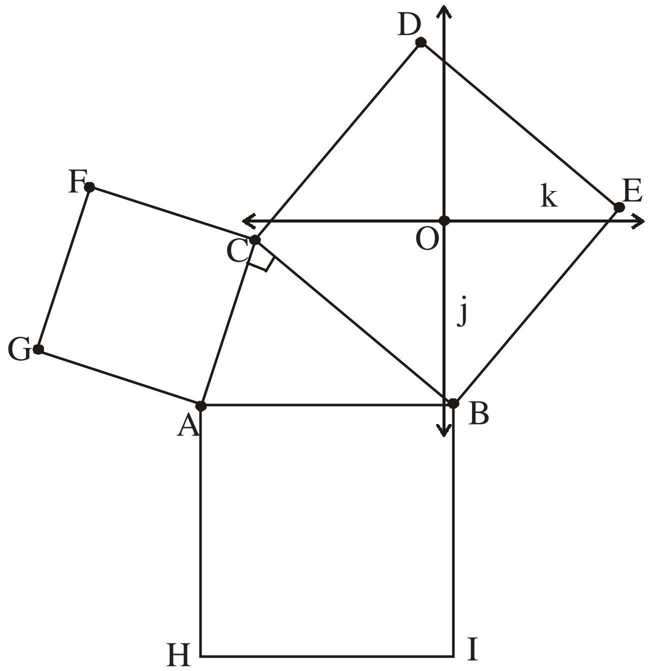
సోపానము (2) స్కేలులో వృత్తానికి ఒకే బిందువు వద్ద స్పర్శించునట్లు రేఖను గీయుము.

ఆ బిందువు T అనుకొని ని నిర్మించండి.

సోపానము (3) కోణమానిని ఉపయోగించి T వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు కోలవండి. మీ కృత్యములోని కోణముల కొలతలను మీ మిత్రుని కొలతలు పోల్చి పరికల్పన చేయండి.

స్పర్శరేఖ, స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్ధమునకు లంబంగా ఉండును.

కృత్యము 2 :



1. పెద్ద కాగితమును తీసుకొని దిగువ కృత్యాలు చేయండి.

   సోపానము (1) కాగితము మధ్యలో విషమబాహు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. కర్ణాన్ని $\overline{AB}$ గా, పెద్ద భుజాన్ని $\overline{BC}$ గా గుర్తించండి.

2. త్రిభుజపు ప్రతిభుజముపై చతురస్రాలు BCDE, AGFC, ABIH లు నిర్మించుట
3. BCDE చతురస్రపు కేంద్రాన్ని 'O' (కర్ణముల ద్విఖండన రేఖ) ని గుర్తించండి.
4. 'O' గుండా కర్ణానికి j లంబరేఖ గీయండి.
5. 'O' గుండా j కి లంబరేఖ k ను గీయండి. j, k రేఖలు BCDE చతురస్రాన్ని నాలుగు భాగాలుగా విభజించుము.
6. AGFC చిన్న చతురస్రాని కత్తిరించండి. BCDE చతురస్రపు నాలుగు భాగాలు కత్తిరించండి. వాటిని కర్ణముపై గల చతురస్రము ABIH లో పూర్తిగా అమరునట్లు ఉంచండి.

   మీ ఫలితాలు మీ మిత్రునితో పోల్చండి.

a, b లు లంబకోణ త్రిభుజ భుజాలు, వాటిపైగల చతురస్రపు వైశాల్యాల a^2 మరియు b^2 లు. 'c' కర్ణము 'c' పై చతురస్రపు వైశాల్యం .

మీ పరిశీలనను "పరికల్పన రూపం"లో ప్రదర్శించండి.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో a మరియు b లు లంబకోణపు భుజాలు మరియు 'c' కర్ణముల కొలతలు అయిన

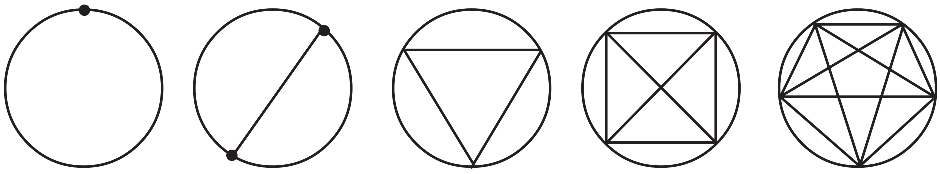
....

(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

6, 7, 8, 9, 10 తరగతులలోని గణిత పుస్తకములోని రేఖాగణిత ప్రవచనాలు / సిద్ధాంతాలకు పరికల్పన చేయుటకు ప్రతి తరగతి పుస్తకము నుండి 10 కృత్యాలను ఎన్నుకొని ప్రయోగశాలలో విద్యార్థులతో చేయించండి. దానికంటే ముందు మీరు చేయు కృత్యాలు దానిలో గల సోపానాలను మీరు వ్రాయండి.

కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలించి తార్కికంగా పరికల్పనలను (చేసిన ప్రవచనాలను) ఎన్ని ఉదాహరణలైనను సత్యమని నిరూపించలేవు. కాని పరికల్పన తప్పు అని చెప్పుటకు ఒక ఉదాహరణ చాలు. ఆ ఉదాహరణనే ప్రత్యుదాహరణ అంటారు. "ప్రధాన సంఖ్యలని బేసి సంఖ్యలే" పరికల్పనకు 2 ప్రత్యుదాహరణ

ఈ క్రింది పటాలను పరిశీలించండి.



బిందువులు	1	2	3	4	5
వృత్తభాగాల	1	2	4	8	16
(రేఖాఖండాలచే)					

1 బిందువుతో రేఖాఖండాలు ఏర్పడవుకావు వృత్తము 1 భాగంగా ఉన్న

2 బిందువులతో ఒకరేఖ ఏర్పడిన వృత్తాన్ని 2 భాగాలు చేసి

3 బిందువులతో 3 రేఖలు ఏర్పడిన వృత్తాన్ని 4 భాగాలు చేసి

4 బిందువులతో 6 రేఖలు ఏర్పడిన వృత్తాన్ని 8 భాగాలు చేసి

5 బిందువులతో 6 రేఖలు ఏర్పడిన వృత్తాన్ని 16 భాగాలు చేసి

పై పరిశీలనలు 2^{n-1} వృత్తముల భాగాలను తెల్పినట్లుగా తోచనా. కావున 6 బిందువులచే ఏర్పడు రేఖాఖండాలు 32, 7 చే 64 వుండాలి. కాని గరిష్టంగా 31, 57 లుగా వస్తాయి.

ఇక్కడ మనకు అనుగమన తార్కికము పనిచేయుటలేదు.

నిగమన తార్కిక పద్ధతి

అనుగమన తార్కిక పద్ధతి ద్వారా చేయు పరికల్పనలు ఎల్లప్పుడు సత్యము కావు. అందులో మనము ప్రత్యేక పరిస్థితులను ఫలితాలను సామాన్యీకరణ చేయలేము.

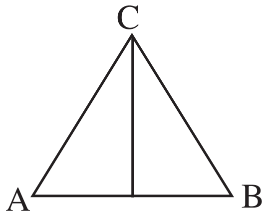
సామాన్య ప్రవచనమును ప్రత్యేక పరిస్థితులకు అన్వయము చేయుటను నిగమన తార్కిక పద్ధతి అంటారు.

ఇందులో ఒక ప్రవచనపు సత్యవిలువ "గణిత వ్యవస్థ" సందర్భమునకు లోనై నిర్ణయించబడుతుంది.

నిగమన తార్కిక పద్ధతి

సత్యముగా స్వీకరించిన ప్రవచనాలు → తార్కిక పర్యావసానాలు

సమద్విబాహు త్రిభుజములలో భూకోణాల కొలతలు సమానాలు ΔABC సమద్విబాహు త్రిభుజము



సారాంశం : ΔABC భూకోణముల కొలతలు సమానములు

యూక్లిడ్ తన ఎలిమెంట్స్‌లో కొన్ని ఆధారాంశాలను తీసుకొని తార్కికంగా నిగమ పద్ధతిలో మనము ఇంతకు క్రితం చేసిన పరికల్పనలను నిరూపించాడు. అది నిరూపించగా సిద్ధాంతాలయ్యాయి.

జ్యామితిలో నిరూపణలు

రేఖాగణిత వాదనలకు ఆధారాంశాలు

1. అనిర్వచిత పదాలు, నిర్వచిత పదములు
2. బీజగణితంలోని సమానత్వ ధర్మాలు
3. జ్యామితిలోని స్వయం స్వీకృతాలు
4. గతంలో నిరూపించబడిన పరికల్పనలు / సిద్ధాంతాలు.

స్వీకృతాలు

మనము ఇంతకు క్రితమే అనిర్వచనీయాలు నిర్వచితాలను చదివేము. ఇప్పుడు యూక్లిడ్ స్వీకృతాలు (Axioms) ఆధునిక పరిభాషలో (కొద్ది మార్పులతో)

1. పరావర్తన సమానతా ధర్మం : $a = a$
2. సంక్రమణ సమానతా ధర్మం : $a = b$ మరియు $b = c$ అయిన $a = c$ అగును
3. సౌష్ఠవ సమానతా ధర్మం : $a = b$ అయిన $b = a$
4. సంకలన సమానతా ధర్మం : $a = b$ అయిన $a + c = b + c$

$a = b$ అయిన $a + c = b + c$

(అలాగే $a = b$ మరియు $c = d$ అయిన $a + c = b + d$)

5. వ్యవకలన సమానతా ధర్మం : అయిన $a - c = b - c$

   (అలాగే $a = b; c = d$ అయిన $a - c = b - d$)

6. గుణకార సమానతా ధర్మం : $a = b$ అయిన $ac = bc$

   అలాగే $a = b; c = d$ అయిన $ac = bd$

7. భాగహార సమానతా ధర్మం : $a = b$ అయిన $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ $c \neq 0$

   అలాగే $a = b$ & $c = d$ అయిన $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $c \neq 0$ $d \neq 0$

సామాన్య భావనలు (Postulates)

నిరూపణకు నిగమ పద్ధతిలో ఫలితాలు తార్కిక హేతువుల పర్యావసానాలు. ఈ వాదసరణి వరుస (Chain and reasoning) నిరూపణ లేని ప్రవచనాలతో ప్రారంభించాల్సి వస్తుంది. నిరూపణ లేకుండా గ్రహించిన ప్రవచనాలను రేఖాగణితంలో సామాన్య భావనలు (Postulate) అని యూక్లిడ్ అన్నారు.

ప్రస్తుతము స్వీకృతాలు సామాన్య భావనలు వేరువేరుగా కాక ఒకే అర్థంతో స్వీకృతాలు తీసుకోవడమయినది.

యూక్లిడ్ స్వీకృతాలు, రూలర్ మరియు వృత్తలేఖినితో చేయు రేఖాగణిత నిర్మాణముల ఆధారితములు. వారి స్వీకృతాల జాబితా అసంపూర్తిగా ఉన్నందున మిల్బర్ట్ (David Milbert) మరియు బిర్కుఫ్ Birkhoff లు యూక్లిడ్ జ్యామితికై వేరు వేరుగా స్వీకృతాలు సమితులను తయారు చేసారు.

యూక్లిడ్ తెల్పిన స్వీకృతాలు – సామాన్య

సోపానం 1 : రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ ఏకైకంగా ఉంటుంది.

సోపానం 2 : ఒక రేఖాఖండమును ఇరువైపులా పొడిగించిన అది సరళరేఖ అవుతుంది.

సోపానం 3 : ఇచ్చిన వ్యాసార్థం మరియు కేంద్రములతో వృత్తాన్ని గీయవచ్చు.

సోపానం 4 : లంబకోణాలన్ని ఒకదానితో ఒకటి సమానం.

సోపానం 5 : రెండు దత్త సరళరేఖలను ఖండించు సరళరేఖ. దానికి ఒకేవైపున ఉన్న అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కన్నా తక్కువగా ఉండునట్లు చేస్తే అపుడు దత్త సరళరేఖలను నిరంతరం పొడిగిస్తే అవి రెండు లంబకోణాల కన్నా తక్కువైన మొత్తం గల కోణాల వైపున కలుసుకుంటాయి.

స్వీకృతము మరియు సామాన్య భావనలు (Axioms and Postulates)

స్వీకృతము : స్వయం నిర్దేషిత సత్యప్రవచనాలను లేదా నిరూపణ అవసరం లేకుండానే సత్యమని భావించే గణిత ప్రవచనాలను, స్వీకృతములు (Axioms) అని అంటాము.

– స్వీకతాలను గణితములోని అన్ని శాఖలలో ఉపయోగిస్తాము.

సామాన్య భావనలు : రేఖాగణితములో మాత్రమే ఉపయోగించే స్వీకృతాలను సామాన్య భావనలు (postulates) అని అంటాము.

యూక్లిడ్ కాలంలో స్వీకృతాలు మరియు సామాన్య భావనలను వేరువేరుగా ఉపయోగించడం జరిగింది. కాని రాను రాను తర్వాతి కాలంలో స్వీకృతాలు (Axioms) మరియు సామాన్య భావనలను (postulates) పర్యాయపదాలుగా ఉపయోగిస్తున్నారు.

చర్చనీయాంశం :

మనం జ్యామితిలో స్వీకృతాలను ఏమైనా ఉపయోగిస్తామా?

మనం రేఖాగణిత నిరూపణలలో స్వీకృతాలను ఉపయోగించే కొన్ని ఉదాహరణలను గురించి చర్చిద్దాం!

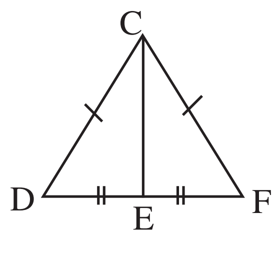
ఉదా 1 : ΔCDF అనేది ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అయితే $\Delta CED \cong \Delta CEF$ అని చూపండి.

నిరూపణ : ΔCDF లో CE అనేది స్వమద్విఖండన రేఖ

$CD = CF$ ($\because$ దత్తాంశం)

$DE = EF$ ($\because$ CE సమద్విఖండ రేఖ)

$CE = CE$ ($\because$ ఒక రాశి అదే రాశికి సమానం అనే స్వీకృతం)

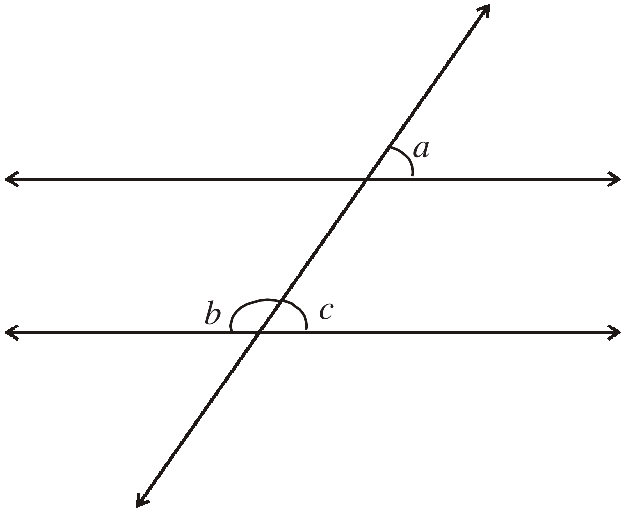


$\therefore$ భు.భు.భు నియమం ప్రకారం

$\Delta CED \cong \Delta CEF$.

ప్రతిక్షేపణ స్వీకృతం ఉపయోగించే సందర్భానికి ఒక ఉదాహరణ

ఉదా 2 : ప్రక్క పటంలో $\angle a = \angle c$, $\angle b + \angle c = 180^0$ అయితే $\angle a + \angle b = 180^0$ అని చూపండి.

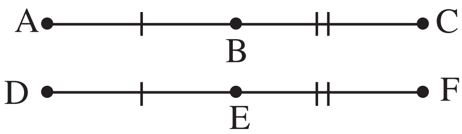


నిరూపణ : $\angle a = \angle c$ (∵ దత్తాంశం)

$\angle b + \angle c = 180^0$ (∵ దత్తాంశం)

$\angle a + \angle b = 180^0$ (∵ ప్రతిక్షేపణ స్వీకృతం)

ఉదా 3 :



ప్రక్క పటంలో $\overline{AB} = \overline{DE}$ మరియు $\overline{BC} = \overline{EF}$ అయితే $\overline{AC} = \overline{DF}$ అని చూపండి.

నిరూపణ : $\overline{AB} = \overline{DE}$ (∵ దత్తాంశం)

$\overline{BC} = \overline{EF}$ (∵ దత్తాంశం)

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DE} + \overline{EF}$ (∵ సమానరాశులకు సమాన రాశులను కూడినచో వచ్చే మొత్తాలు సమానం అనే స్వీకృతం నుంచి)

$\therefore \overline{AC} = \overline{DF}$

ఉదా 4 :

పై పటంలో D, F ల మధ్య గల బిందువులలో ఏదో బిందువు E అయితే $\overline{DE}+\overline{EF}=\overline{DF}$ అని చూపండి.

నిరూపణ : E అనేది D మరియు F ల మధ్యగల (∵ దత్తాంశం)

ఏదో ఒక బిందువు

$\overline{DE}+\overline{EF}=\overline{DF}$ (∵ ఒకే మొత్తంలో గల అన్ని భాగాలను కూడితే వచ్చే విలువ మొత్తానికి సమానం అనే స్వీకృతం)

$\therefore \overline{DE}+\overline{EF}-\overline{EF}=\overline{DF}-\overline{EF}$ (∵ సమాన రాశుల నుంచి సమాన రాశులను తీసివేయగా మిగిలిన శేషాలు సమానం అనే స్వీకృతం)

$\therefore \overline{DE}=\overline{DF}-\overline{EF}$

ఇలా జ్యామితిలోని లనిరూపణలలో రకరకాలు స్వీకృతాలను విరివిగా ఉపయోగిస్తాం.

పరికల్పన : కొన్ని ప్రవచనాలను పరిశీలన ద్వారుఆ, వివేచనతో, సత్యమని, భావించి ఊహాత్మకంగా నిర్ణయిస్తారు.

V. రేఖాగణితంలో నిరూపణలు

- **గణితశాస్త్రములో ప్రవచనాలు నిరూపించబడతాయి.** ఇతర శాస్త్రాలలో అవి సరిచూడబడతాయి. ఎందుకనగా గణితశాస్త్రంలోని ప్రవచనాలు అంతకుముందే తెలిసిన విషయాల నుండి రాబట్టబడినవి. కాని ఇతర శాస్త్రాలలో అవి ప్రయోగాలు, పరిశీలనల ద్వారా చెప్పబడినవి.

- **నిరూపణ అంటే ఏమిటి?**

  గణిత ప్రవచనపు నిరూపణ అంటే హేతుబద్ధ తార్కిక వాదనలతో ప్రవచనపు సత్యతను నిర్ధారించుట. దీనిలో సోపానాలన్ని అనుషంగికాలే. నిరూపణ అంటే అంగీకృత వాదన అని చెప్పవచ్చు.

- **గణిత ప్రవచనాన్ని ఎలా నిరూపించాలి?**

మొట్టమొదట నిరూపించాల్సిన ప్రవచనాన్ని అంర్థం చేసుకోవాలి. అనగా మన లక్ష్యమేమిటో? తెలుసుకోవాలి. దీనికై ప్రవచన సారాంశభాగమేమిటి? దత్తాంశ భాగమేమి? ఇచ్చిన షరతులేవి? అని మనలోమనమే ప్రశ్నించుకోవాలి. సాధ్యమయిన చోట సమస్యను రేఖాచిత్రము / పటము ద్వారా ప్రదర్శించి దత్తాంశ సారాంశ విషయములను సరైన సంకేతాలతో ప్రదర్శించాలి.

ఆ తరవాత దత్తాంశం, సారాంశాలకు గల సంబంధాన్ని గుర్తించాలి. నేరుగా లేకున్నా చిన్న చిన్న ఉపలక్ష్యాలతో సంబంధాన్ని ఏర్పరచి సారాంశాన్ని రాబట్టాలి.

రేఖాగణితంలో నిరూపణలు ఎలా వ్రాయలి?

(i) సమస్యలోని సమాచారమును సూచించు పటమును గీయాలి.

(ii) సమస్యలోని దత్తాంశాన్ని పటముతో అన్వయము చేస్తూ వ్రాయలి.

(iii) సమస్య / ప్రవచనములోని సారాంశాన్ని పటముతో అన్వయము చేసి, వ్రాయలి.

(iv) గమ్యం చేరుటకు ఇంకనూ కావలసిన సమాచారమునకై పటమును క్షుణ్ణంగా అధ్యయనం చేయాలి.

(v) పిదప నిరూపణ వ్రాయుట ప్రారంభించాలి. వ్రాసే ప్రతి సోపానానికి కారణాలను తెల్పాలి. దిగువన తెల్పిన విషయములు సోపానాలకు కారణములుగా చూపవచ్చును.

(ఎ) స్వీకృతాలు (బి) నిర్వచనాలు, (సి) దత్తాంశము (డి) పూర్వము నిరూపించిన ప్రవచనాలు

మాదిరి నిరూపణ

దత్తాంశం :

సారాంశం

నిరూపణ :

ప్రవచనాలు నిరూపణలో వ్రాసే ప్రతిసోపానమును వ్రాయలి.	**కారణాలు** ప్రతి సోపానానికి కారణము వ్రాయాలి. సోపానము కారణము ఒకే వరుసలో ఉండాలి.
1. __________ 2. __________ 3. __________ 4. __________	1. __________ 2. __________ 3. __________ 4. __________

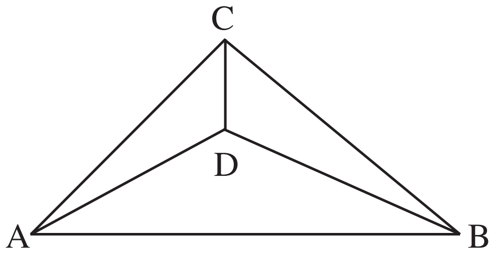
రేఖాగణితంలో ప్రవచన నిరూపణకి ప్రణాళిక వేసుకోవాలి. సారాంశము నుండి వెనకకు (తిరోగమనంగా) ఆలోచించడము మేలైన పద్ధతి. కావలసిన అంశము (సారాంశము) నుండి ఒక్కొక్క మెట్టు వెనక్కి దత్తాంశము వరకు ఆలోచించాలి.

మన ప్రణాళికను అమలు చేయుటకు క్రమచిత్రము బాగుగా ఉపయోగపడుతుంది. మెట్ల వారిగా క్రమచిత్రాన్ని సారాంశము నుండి దత్తాంశము వరకు వెనకకు మన ఆలోచనలు సూచిస్తు వ్రాయాలి.

దిగువ ఉదాహరణలు గమనిచండి.

ఉదా 1 : దత్తాంశము : ΔABC లో $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ మరియు ΔABD లో $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

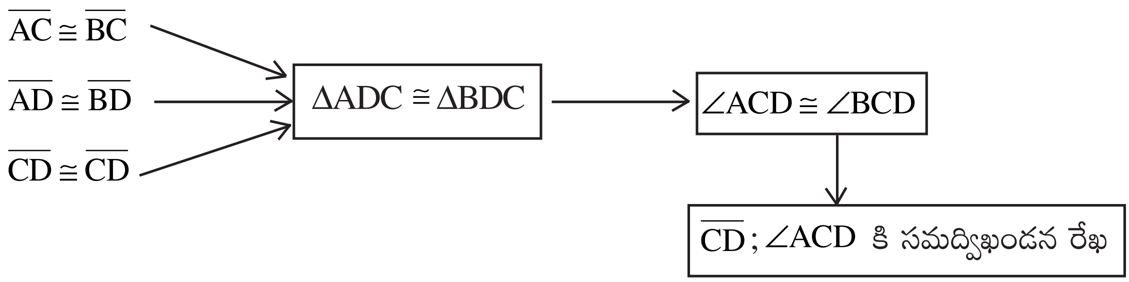
సారాంశం : $\angle ACB$ కి $\overline{CD}$ సమద్విఖండన రేఖ



ప్రణాళిక : తిరోగమనంలో క్రమచిత్రాన్ని గీద్దాం. $\angle ACB$ కి $\overline{CD}$ సమద్విఖండన రేఖ. అగుటకు $\angle ACB$ కావలెను. $\angle ACB$ దీనికై కావాలి.

మనకు $\Delta ABC, \Delta ABD$ లు సమద్విబాహు త్రిభుజాలని తెలుసు. కావున $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ మరియు $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ గా గమనించవచ్చు. ఉమ్మడి భుజము $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ కావున భు.భు.భు సర్వసమానత్వత నుండి ΔACD మరియు ΔBDC లు సర్వసమాన త్రిభుజాలు.

ఇక పురోగమనంగా మొదటి నుండి ఆలోచిస్తే $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ మరియు $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ కావున $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ $\therefore$ $\angle ACD \cong \angle BCD$ కావున $\angle ACB$ కి సమద్విఖండన రేఖ అగును. దీనిని క్రమచిత్రముగా వ్రాయగా



క్రమచిత్రములోని బాణపు గుర్తు తార్కిక వాదన పర్యవసానాన్ని సూచిస్తుంది.

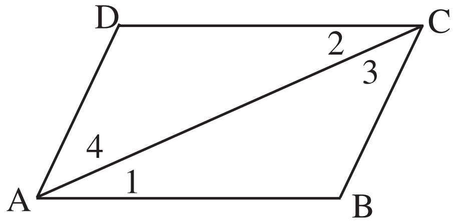
క్రమచిత్ర సమాచారాన్ని హేతుబద్ధంగా నిరూపణ రాయగా

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	దత్తాంశం
$\overline{AD} \cong \overline{BD}$	దత్తాంశం
$\overline{CD} \cong \overline{CD}$	పరావర్తన నియమము
$\Delta ADC \cong \Delta BDC$	భు.భు.భు సర్వసమానత్వము

$\angle ACD \cong \angle BCD$ (CPCT)

$\therefore$ $\overline{CD}$; $\angle ACD$ యొక్క నిర్వచనము

సమద్విఖండ రేఖ



ఉదా2 : సమాంతర చతుర్భుజపు కర్ణము ఆ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

దత్తాంశము : వ్యతిరేఖ దిశలో ఆలోచించిన

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$. దీనికై భు.భు.భు, భు.కో.భు, కో.భు.కో సమానత్వనియమాలలో ఏది అన్వయిస్తుంది.

ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో $\overline{AC} \parallel \overline{CD}$ మరియు $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

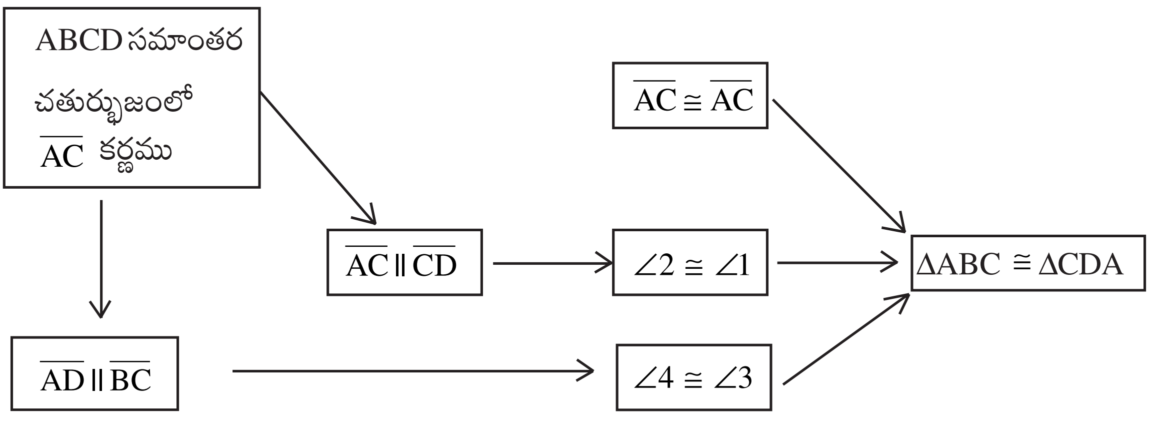
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ కావున $\angle 1 \cong \angle 2$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ కావున $\angle 3 \cong \angle 4$

సర్వసమానత్వ నిరూపణకు ఇంకొక కొలత ఏది? $\overline{AC} \cong \overline{AC}$

కో.భు.కో నియమము క్రింద $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

దీనిని క్రమచిత్రరూపంలో వ్రాయగా



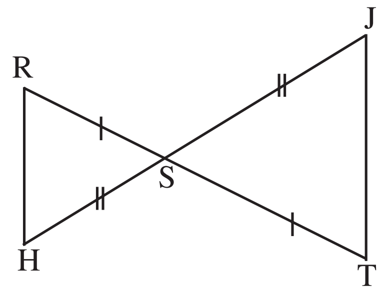
కృత్యము నిరూపణకు రాయండి.

కృత్యము తరువాత ఉదాహరణకు క్రమచిత్రము వ్రాయండి.

ఒక ఉదాహరణ తీసుకొని సిద్ధాంతాన్ని ఎలా విశ్లేషించి నిరూపించాలో చూద్దాం.

ఉదా: ప్రక్కపటం నుండి

$\overline{RH} \cong \overline{JT}$ అని చూపండి.



విశ్లేషణ : $\overline{RH} \cong \overline{JT}$ అని చూపుట మన లక్ష్యం

$\overline{RH}$ మరియు $\overline{TJ}$ లు రెండు సర్వసమాన త్రిభుజముల

సదృశభాగాలైన $\overline{RH} \cong \overline{TJ}$ అగును

కావున ΔRSH మరియు ΔSJT లు సర్వసమానం అని చూపాలి.

దత్తాంశం ప్రకారం

$\overline{RS} \cong \overline{ST}$ మరియు

$\overline{HS} \cong \overline{SJ}$

ΔRSH మరియు ΔSJT లు సర్వసమాన త్రిభుజాలు.

అని చూపాలంటే త్రిభుజాల సర్వసమానత నియమాలైన భు.భు.భు, భు.కో.భు, లం.క.భులలో ఏదో ఒక నియమాన్ని పాటించాలి.

దత్తాంశం ప్రకారం రెండు త్రిభుజాల రెండు సదృశ భుజాలు సమానం కావున మూడవ భుజమును గూర్చి గాని కోణమును గూర్చి గాని ఆలోచించాలి. కాని మూడవ భుజములు సర్వసమానం అనేది నిరూపించాల్సిన విషయం. కావున కోణం గురించి ఆలోచించాలి.

పటం ప్రకారం

$\angle RSH$ మరియు $\angle JST$ లు శీర్షాభిముఖ కోణాలు

$\therefore \angle RSH = \angle JST$

$\Delta RSH, \Delta JST$ లలో $\overline{RS} \cong \overline{ST}$ మరియు

$\overline{HS} \cong \overline{SJ}$

$\angle RSH = \angle JST$

$\therefore$ భు.కో.భు నియమం ప్రకారం

$\Delta RSH \cong \Delta SJT$ కాబట్టి

$\overline{RH} \cong \overline{TJ}$

ఇలా ప్రతి నిరూపణను విశ్లేషణాత్మక దృష్టిలో పరిశీలించడం అలవర్చుకోవాలి.

VI. జ్యామితీయ నిర్మాణాలు

జ్యామితీయ నిర్మాణం అంటే జ్యామితి పటాలను ఖచ్చితంగా స్కేలు మరియు వృత్త లేఖినులతో నిర్దేశించి కొలతల ప్రకారం ఖచ్చితమయిన పటాలను గీయండి.

చర్చనీయాంశం : నిర్మాణాలు గీసేటప్పుడు కోణమానిని ఉపయోగించవచ్చా?

- రేఖాగణితంలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలు ఖచ్చితంగా ఏ తరగతి నుండి విద్యార్థులకు నిర్మాణాలు గీయడం అలవాటు.
- జ్యామితీయ నిర్మాణాలు ఉపయోగం. విద్యార్థులకు సహకరించబడుతుంది.

జ్యామితిలోని కొన్ని మౌళిక నిర్మాణాలు

1. దత్త రేఖాఖండానికి లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయడం.
2. దత్త కోణానికి సమానమయిన కోణంను నిర్మించడం.
3. బాహ్యబిందువు (దత్త సరళరేఖపై లేని బిందువు) నుండి దత్త సరళరేఖకు లంబాన్ని గీయడం.

జ్యామితీయ నిర్మాణాలు

మొదట్లో గణితశాస్త్రవేత్తలు రూలర్ మరియు వృత్తలేఖినితో చేసిన వాటినే నిర్మాణాలుగా భావించేవారు. ఎందుకనగా కోణమానిని ఉపయోగించి గీచిన పటములను నిరూపణ చేయలేము.

కాని ప్రస్తుతం పాఠశాలల స్థాయి వరకు మాత్రం జ్యామితీయ పరికరాల పెట్టెలోని పరికరాలతో గీచిన వాటిని నిర్మాణాలుగానే భావించడం జరగుతుంది.

- జ్యామితీయ నిర్మాణం అంటే జ్యామితి పటాలను ఖచ్చితంగా రూలర్ మరియు వృత్తలేఖినులతో నిర్దేశించిన కొలతలు ప్రకారం కచ్చితమయిన పటాలను నిర్మించడం.
- రూలర్‌తో కేవలం రెండు బిందువుల గుండా పోయే రేఖను గీయగలం.
- వత్తలేఖినితో దత్త బిందువు, దత్తవ్యాసార్థంతో గల వృత్త చాపాన్ని గీయగలుగతాము.
- ఇతర నిర్మాణ సమస్యలను చేయుటకు ఆ సమస్యను విశ్లేషించి ప్రాథమిక నిర్మాణాలను ఉపయోగిస్తాం.

- జ్యామితీయ నిర్మాణాలలో క్రింది సోపానాలు ఉండును.

  (1) విశ్లేషణ

  (2) నిర్మాణం

  (3) నిరూపణ

VII. రేఖాగణితంలో ప్రయోగశాల కృత్యాలు

- గ్రాఫ్ పేపర్ సహాయంతో పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును నిరూపించుట.

  కృత్యం : లక్ష్యము : పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క నిరూపణ.

  కావలసిన పరికరాలు : గ్రాఫ్ పేపర్, పెన్సిల్ మరియు స్కేలు

విధానం : గ్రాఫ్ పేపర్ కాగితంపై 3 సెం.మీ. భూమి, 4 సెం.మీ. ల ఎత్తు ఉండేటట్లుగా ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని గీయాలి.

ఆ తర్వాత భూమి ఒక చతురస్రాన్ని, ఎత్తు మరియు కర్ణాలపై కూడా చతురస్రాలను గీయాలి.

ఇపుడు భూమి మరియు ఎత్తులపై గీచిన చతురస్రాల వైశాల్యాలను గళ్ళను లెక్కించి కూడాలి.

ఇక కర్ణంపై గీచిన చతురస్ర వైశాల్యంను కనుగొనడానికి ఆ చతురస్రంలో గ్రాఫ్ పేపర్ చూపినట్లుగా ఒక చిన్న చతురస్రం. కొన్ని లంబకోణ త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి. ఆ తర్వాత అన్నింటి వైశాల్యాల మొత్తం కనుగొని కూడితే కర్ణం మీది చతురస్ర వైశాల్యం వస్తుంది.

పట్టిక :

క్రమ సంఖ్య		
1	భూమిపై గీచిన, చతురస్రంలోని చదరాల సంఖ్య	9
2	ఎత్తుపై గీచిన చతురస్రంలోని చదరాల సంఖ్య	16
3	కర్ణంపై గీచిన చతురస్ర వైశాల్యం	25

పై పట్టిక నుండి భూమి మరియు ఎత్తు మీద వర్గాల మొత్తం కర్ణం మీది వర్గానికి సమానం అవుతుంది.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో

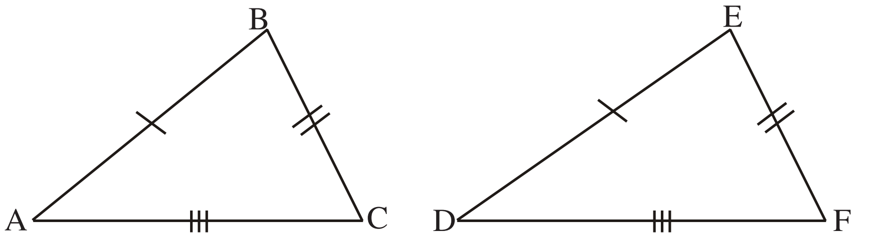
భూమి మరియు ఎత్తుల వర్గాల మొత్తం కర్ణము మీదివర్గానికి సమానం అవుతుంది.

కొన్ని మాదిరి కృత్యాలు

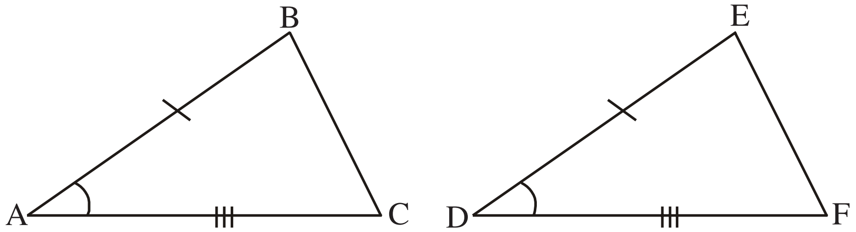
1. పేపర్ ఫోల్డింగ్ ద్వారా ప్రాథమిక జ్యామితీయ నిర్మాణాలను నిరూపించడం.
2. జ్యామితికి సంబంధించిన అంశములకు సంబంధించిన ప్రయోగములను గణిత ప్రయోగశాలలో చేసి తాము కనుగొన్న విషయాలను పరికల్పనగా వ్రాయించడం.

కృత్యపత్రము

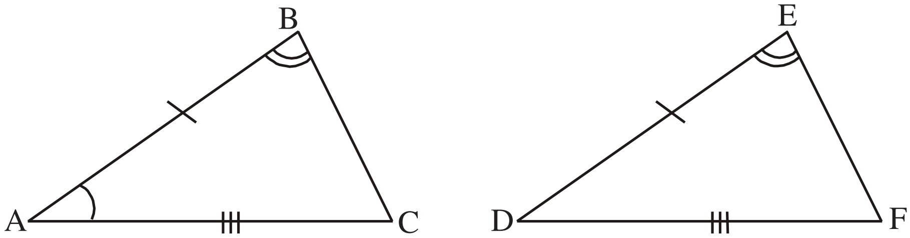
1. భు.భు.భు (భుజము, భుజము, భుజము)



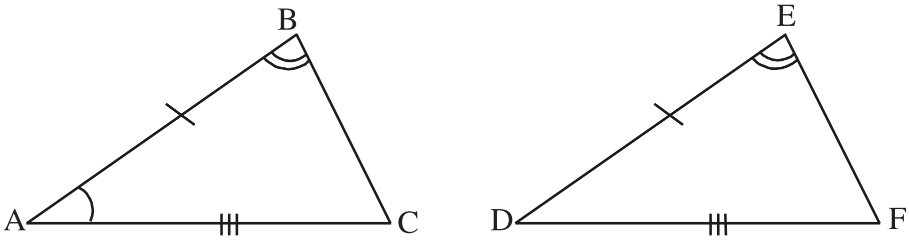
2. భు.కో.భు (భుజము, కోణము, భుజము)



3. కో.భు.కో (కోణము, భుజము, కోణము)



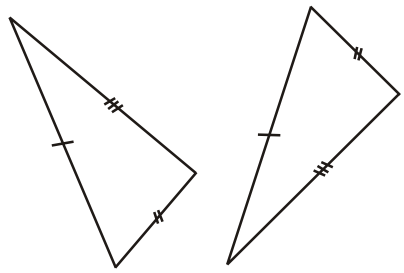
4. కో.భు.కో (కోణము, భుజము, కోణము)



ఈ క్రింది సందర్భాలలో

సూచన : త్రిభుజాలు సర్వసమానం అని నిరూపించుటకు ఏ సర్వసమానాలు నియమాలు ఉపయోగిస్తారో తెల్పండి.

1.



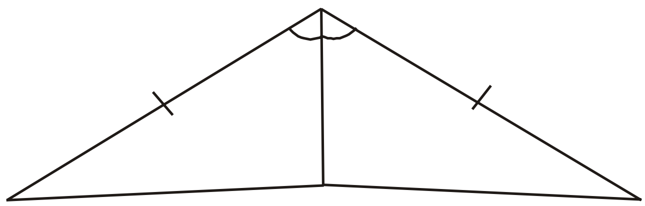
భు.భు.భు

భు.కో.భు

కో.భు.కో

కో.కో.భు

2.



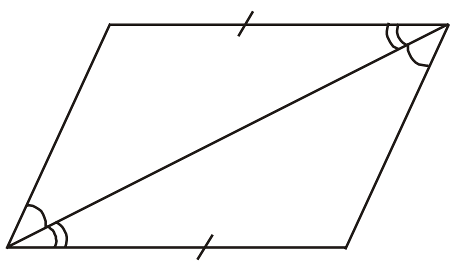
భు.భు.భు

భు.కో.భు

కో.భు.కో

కో.కో.భు

3.



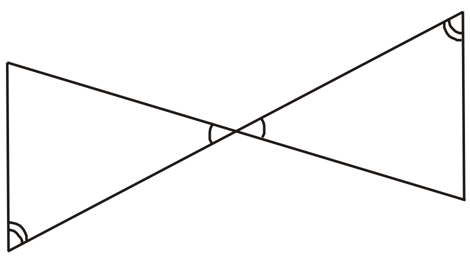
భు.భు.భు

భు.కో.భు

కో.భు.కో

కో.కో.భు

4.



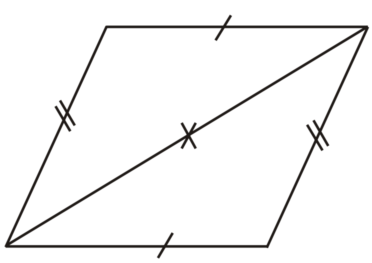
భు.భు.భు

భు.కో.భు

కో.భు.కో

కో.కో.భు

5.



భు.భు.భు

భు.కో.భు

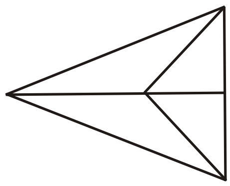
కో.భు.కో

కో.కో.భు

ఈక్రింద ఇవ్వబడిన సాధనలలో సోపానముల కారణములు ఇవ్వలేదు. వాటిని తెలపండి.

6. దత్తాంశం : $\angle YLF \cong \angle FRY$, $\angle RFY \cong \angle LFY$

సారాంశం : $\Delta FRY \cong \Delta FLY$

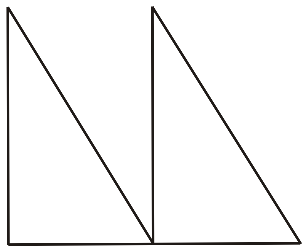


సోపానాలు	కారణాలు
1. $\angle YLF \cong \angle FRY$	
2. $\angle RFY \cong \angle LFY$	
3. $\overline{FY} \cong \overline{FY}$	
4. $\Delta FRY \cong \Delta FLY$	

7. దత్తాంశం : $\overline{LT} \cong \overline{TR}$, $\angle ILT \cong \angle ETR$,

$IT \parallel ER$

సారాంశం : $\Delta LIT \cong \Delta TER$



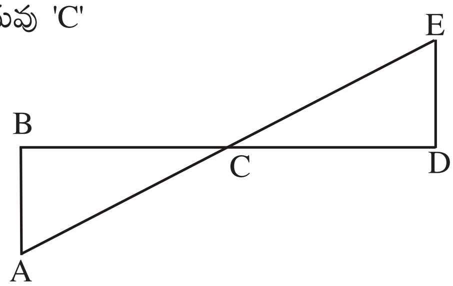
సోపానాలు	కారణాలు
1. $\overline{LT} \cong \overline{TR}$	
2. $\angle ILT \cong \angle ETR$	
3. $IT \parallel ER$	
4. $\angle LTI \cong \angle ERT$	
5. $\Delta LIT \cong \Delta TER$	

8. దత్తాంశం : $\overline{LT} \cong \overline{TR}$ యొక్క మధ్య బిందువు 'C'

$AB \perp BD$

$BD \perp DE$

సారాంశం : $\Delta ABC \cong \Delta EDC$

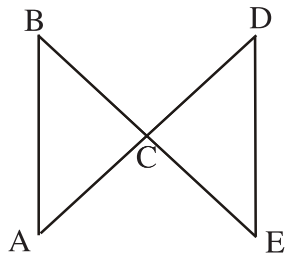


సోపానాలు	కారణాలు
1. $\overline{BD}$ యొక్క మధ్య బిందువు 'C'	
2. $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ మరియు $\overline{BD} \perp \overline{DE}$	
3. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$	
4. $\angle BCA \cong \angle ECD$	
5. $\angle ABC$ మరియు $\angle EDC$ లంబకోణాలు	
6. $\angle ABC \cong \angle EDC$	
7. $\Delta ABC \cong \Delta EDC$	

9. దత్తాంశం : $\overline{BA} \cong \overline{ED}$

$\overline{BE}$ మరియు $\overline{AD}$ ల మధ్య బిందువు 'C'

సారాంశం : $\Delta ABC \cong \Delta DEC$

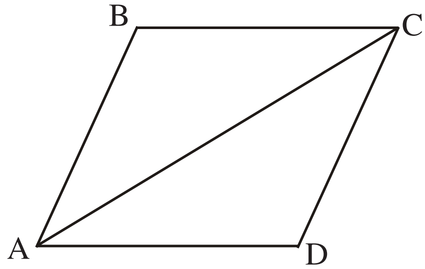


సోపానాలు	కారణాలు
1. $\overline{BA} \cong \overline{ED}$	
2. $\overline{BE}$ మరియు $\overline{AD}$ ల మధ్య బిందువు 'C'	
3. $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	
4. $\overline{AC} \cong \overline{DC}$	
5. $\Delta ABC \cong \Delta DEC$	

10. దత్తాంశం : $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

$\overline{AC}$ యొక్క $\angle BCD$

సారాంశం : $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

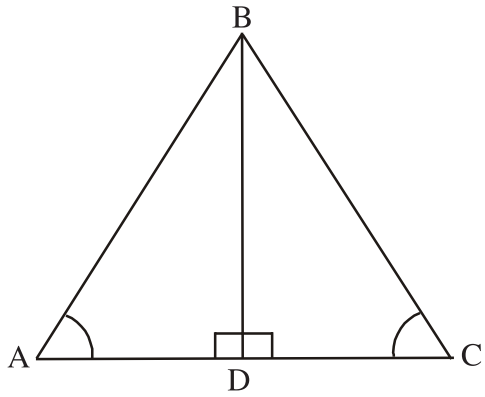


సోపానాలు	కారణాలు
1. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	
2. $\overline{AC}$ యొక్క $\angle BCD$	
3. $\angle BCA \cong \angle DCA$	
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	
5. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	

11. దత్తాంశం : $\angle ADB$ మరియు $\angle CDB$

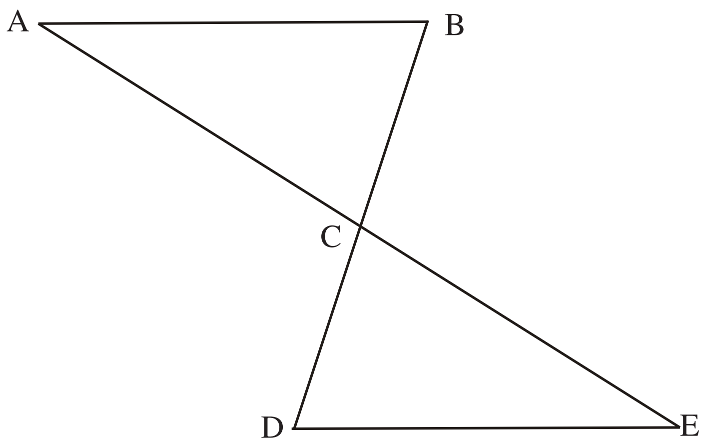
$\angle A \cong \angle C$

సారాంశం : $\Delta ADB \cong \Delta CDB$



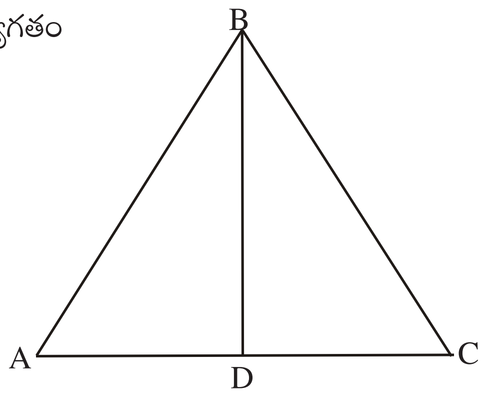
12. దత్తాంశం : BD మరియు AE ల మధ్య బిందువు 'C'

సారాంశం : $\Delta ABC \cong \Delta EDC$



13. దత్తాంశం : $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{BD}$ అనేది $\overline{AC}$ యొక్క మధ్యగతం

సారాంశం : $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



VIII. రిఫరెన్స్ గ్రంథాలు

1. Plane Geometry - Frank Proop.
2. A. Pogorelov Geometry - Leonid levant
3. Geometry - Charley C. Carico Herman Hyatt
4. Elements of Geometry - Ladd, Kelly

4

క్షేత్రమితి

ఉపోద్ఘాతం

క్షేత్రమితి ప్రధానంగా జ్యామితీయ భావనల మేళవింపుతో కూడి ఉంటుంది. జ్యామితీయ పటాలు సమతలపటాలు, ద్విమితీయ – త్రిమితీయ పటాల అవగాహన ఈ అధ్యాయ అభ్యసనకు ప్రాథమికంగా అవసరం. పిల్లలు క్షేత్రస్థాయిలో వివిధ రకాల వస్తువులు, పటాలు వాటి ఆకారాలను పరిశీలిస్తుంటారు. వాటిని వినియోగిస్తుంటారు. అవసరమైన సందర్భాలలో అవి ఎలా ఏర్పడ్డాయి. ఏఏ ఆకృతులను కల్గి ఉన్నాయో. తన సొంత మాటలలో, పదాలలో వివరిస్తుంటారు.

మనం ప్రాథమిక తరగతుల్లోనే త్రిమితీయ వస్తువులు, వాటి ఆకారాలు కాగితముపై చూపినపుడు ఎలా ద్విమితీయ ఆకారాలలో కనిపిస్తాయో. వివిధ ఆకృతుల ద్వారా అవగాహనపర్చాము. వారు వాటిని దృశ్యీకరణ చేస్తూ ఏ ఆకారంలో ఉన్నాయి? వాటి తలాలు ఎలా ఉన్నాయి? మొదలైన ఆలోచనల ద్వారా సమతల పటాలను పరిచయం చేయడమైనది.

క్షేత్రమితి అభ్యసనం ద్వారా పిల్లలు తమ నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే స్థలాల వైశాల్యం, చుట్టుకొలతలు లెక్కించగలిగే స్థాయిని కల్గి ఉండాలి. అలాగే త్రిమితీయ వస్తువుల వినియోగంలో వాటి ఉపరితల వైశాల్యం, వాటి యొక్క పరిమాణం, అవి ఒక ఆకారం నుండి మరొక ఆకారంలోకి మార్పు చెందడం వంటి అవగాహనలను ఉపయోగించాల్సిన అవసరం ఉంటుంది. ఇది వారికి అత్యావశ్యకం. ఇందుకోసం వాటికి చెందిన భావనలు

పిల్లలకు అవగాహన చేయడానికి సంబంధిత విషయాంశాలను 6 నుండి 10వతరగతి వరకు వివిధ అధ్యాయాలలో స్థాయి ఆధారంగా ప్రవేశపెడుతూ చర్చిండమైంది. ఏఏ అంశాలు ఏ తరగతిలో చర్చించారో పట్టిక రూపంలో ఇవ్వడమైనది. వాటిని మనం పిల్లలకు అవగాహన చేయించడం ద్వారా వీటితోకూడిన సమస్యలు సాధించడంపై దృష్టిపెట్టి అవగాహన ప్రక్రియలు కల్పించాల్సి ఉంటుంది. తద్వారా పిల్లల్లో కలిగిన/ పెంపొందింపబడిన అవగాహన/ జ్ఞానము ద్వారా వారిని పై తరగతి భావనలపై పట్టుసాధించేలా చేయడం ముఖ్యం. దీని కోసం ఈ అధ్యాయంలో వివిధ సమతల పటాలు వాటి సముదాయాలతో ఏర్పడే పటాల వైశాల్యాలు లెక్కించడానికి అవసరమైన ఆలోచనలు, అలాగే వివిధ త్రిమితీయ ఆకృతులు, వాటి సమూహాలతో ఏర్పడే ఆకారాల ఉపరితలవైశాల్యం, ఘనపరిమాణం లెక్కించడానికి అవసరమైన పరిజ్ఞానం కోసం చర్చించడమైనది. ఈ చర్చద్వారా మనం పాఠ్యపుస్తకాలలోని పాఠ్యాంశాలు, భావనలు, సమస్యలు, వివిధ అభ్యాసాలపై అవగాహన పొందేలా చేయడం ద్వారా పిల్లలు తామే సొంతంగా ఈ భావనలతో కూడిన నూతన సమస్యలు కూడా సాధించేలా చూడాలి.

కావున ఉపాధ్యాయులుగా మనం ఈ అధ్యాయంలో చర్చించిన అంశాలను అవగాహన చేసుకొందాం.

చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలు, ఉపరితల వైశాల్యాలు - ఘనపరిమాణం

6th	7th	8th	9th	10th
చుట్టుకొలత-వైశాల్యాలు • చుట్టుకొలత భావన • దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత • క్రమరూప ఆకృతుల చుట్టుకొలత • చతురస్రం • త్రిభుజం – ఇతర క్రమాకార ఆకృతుల (బహుభుజుల) చుట్టు కొలత (చుట్టుకొలత భావనలపై సమస్యల సాధన) – వైశాల్యం – భావన • క్రమాకారాలు • అక్రమాకారాలు • దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం • చతురస్రం వైశాల్యం	**వైశాల్యం–చుట్టుకొలత** • చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాలు, చుట్టకొలతల భావనల పునరవగాహన. – సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యం • దీర్ఘచతురస్రం మరియు చతుర్భుజం మధ్య సంబంధం. • దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్య సూత్రం ఆధారంగా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని రాబట్టుట • వివిధ సందర్భాలతో కూడిన సమాంతర చతుర్భుజాల భూముల ఉన్నతులను గుర్తించడం • ఒకే భూమి కల్గి, ఒక జత సమాంతర రేఖల మధ్య గల వివిధ సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యలు సమానం. (LA) • పైవివిధ సందర్భాల ద్వారా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యల సాధారణీకరించడం	**సమతల పటముల వైశాల్యం:** త్రిభుజం, సమాంతర చతర్భుజం రాంబస్–వైశాల్యాల భావనలపై పునరవగాహన • సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్య భావన – వివిధ సందర్భాలు • దీర్ఘచతురస్రం మరియు త్రిభుజం కలయికతో ఏర్పడే సందర్భం • ఒక దీర్ఘ చతురస్రం రెండు త్రిభుజాలతో ఏర్పడే సందర్భం • పై రెండు సందర్భాల ఆధారంగా సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాసూత్రాన్ని రాబట్టుట. • **Lab Activity** :గ్రాఫ్ కాగితం సహాయంతో, సమలంబ చతుర్భుజాన్ని త్రిభుజరూపంలో మార్చి, తద్వారా రెండింటి వైశాల్యాలను సరిచూచి దృవీకరించడం. • తద్వారా సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని సాధారణీకరించుకోడం.	**ఉపరితల వైశాల్యం – ఘన పరిమాణాలు** • దీర్ఘఘనం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం, ప్రక్కతల వైశాల్యంల భావనల– పునరవగాహన • ఘనపరిమాణం, సామర్థ్యం భావనలపై అవగాహన. • దీర్ఘఘనం, సమఘనం యొక్క ఘనపరిమాణ భావనల అవగాహన • వివిధ సమతల ఆకారాలు భూములుగా గల పట్టకాల వైశాల్యాలు కనుగొనుట. • స్థూపం / క్రమవృత్తాకార స్థూపాల భావనల అవగాహన	• దీర్ఘఘనం, సమఘనం, క్రమపట్టకం, క్రమవృత్తాకార స్థూపం, క్రమపిరమిడ్, క్రమవృత్తాకార శంఖువు గోళం, అర్ధగోళం (వంటి ఘనాకార వస్తువుల) ప్రక్కతల వైశాల్యం, సంపూర్ణ తల వైశాల్యం మరియు ఘన పరిమాణం • ఘనాకార భావనల పునరభ్యాసం • ఘనాకార వస్తువుల సముదాయాలతో కూడిన వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యాలను గణించడం. • స్థూపం, అర్ధగోళం కలయికలో ఏర్పడిన వస్తువులు • శంఖువు, అర్ధగోళం కలయికలో ఏర్పడిన వస్తువులు • స్థూపం, శంఖువు కలయికలో ఏర్పడిన వస్తువులు

6th	7th	8th	9th	10th
	• త్రిభుజ వైశాల్యం : – దీర్ఘచతురస్రంలో భాగాలుగా త్రిభుజాన్ని గుర్తింపజేసి, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, త్రిభుజ వైశాల్యం మధ్య సంబంధాన్ని గుర్తింపచేయడం. • సమాంతర చతుర్భుజంలో త్రిభుజాలను భాగాలుగా గుర్తింపజేసి, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం, త్రిభుజ వైశాల్యం మధ్య సంబంధాన్ని గుర్తింపజేయుట (LA) • పై రెండు సందర్భాల ఆధారంగా త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని సాధారణీకరించడం. • గ్రాఫ్/గ్రిడ్ పేపర్ ఆధారంగా వైశాల్య భావనతో సాధారణీకరించి త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని సత్యమని తెలుసుకోవడం (LA) – ఒకే భూమి కల్గి రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యగల వివిధ త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సర్వసమానం అవుతాయని గ్రిడ్/గ్రాఫ్ కాగితం	**చతుర్భుజ వైశాల్యం :** • త్రిభుజ వైశాల్యం ఆధారంగా చతుర్భుజ వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని రాబట్టడం **సమచతుర్భుజ వైశాల్యం :** • త్రిభుజవైశాల్యం ఆధారంగా సమచతుర్భుజవైశాల్యంనకు సూత్రము రాబట్టుట. • నిజజీవితంలో త్రిభుజాలు, వివిధరకాల చతుర్భుజాలు కలయికతో ఏర్పడే ఆకారాల వైశాల్యాలను కనుగొనుట. **వృత్తవైశాల్యం** • గ్రాఫ్/గ్రిడ్ పేపర్ ఆధారంగా వృత్త వైశాల్యంపై అవగాహన కల్పించడం • వృత్త వైశాల్యం సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం	• స్థూపం యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం ఆధారంగా – రాబట్టుట • స్థూపంయొక్క వలరూపం ఆధారంగా సంపూర్ణతల వైశాల్యాన్ని లెక్కించుట. (సూత్రాన్ని రాబట్టుట) • స్థూపం యొక్క ఘన పరిమాణ భావన, సూత్రాన్ని రాబట్టుట (నాణెములతో స్థూపమును ఏర్పరచుట) (LA)	• శంఖువు, స్థూపం శంఖువు కలయికలో ఏర్పడిన వస్తువులు • శంఖువు–స్థూపం–అర్ధగోళం కలయికలో ఏర్పడిన వస్తువులు సముదాయం. • **ఘనాకార వస్తు సముదాయాల ఘనపరిమాణం :** (పై సందర్భాలతో కూడిన ఘనకార వస్తు సముదాయాలు) • ఒక ఆకృతిలో ఉన్న వస్తువును మరొక ఆకృతిలోకి మార్పు చేయుటకు సంబంధించినవి.

6th	7th	8th	9th	10th
	ఆధారంగా నిరూపించుట. • లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు భుజాలలో దేనినైనా ఎత్తుగా తీసుకోవచ్చని గుర్తించుట • **సమచతుర్భుజం (రాంబస్) వైశాల్యం :** • వివిధ రకాల త్రిభుజాల ఆధారంగా చతుర్భుజాలను ఏర్పరచడం. • వివిధ త్రిభుజాకారాలలో రెండు త్రిభుజాలను కలిపి సమాంతర చతుర్భుజాలను ఏర్పరచడం – తద్వారా వాని భుజాలను కొలవడం. (LA) • సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఒక సందర్భంనే (4 భుజాలు సమానంగా ఉండి) సమ చతుర్భుజం అని గుర్తించుట. • త్రిభుజ వైశాల్యం ఆధారంగా రాంబస్ వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని రాబట్టుట.	ప్రయోగాత్మకంగా రాబట్టుట(LA) • వృత్తవైశాల్యాన్ని త్రిభుజ వైశాల్యం ఆధారంగా రాబట్టుట (LA) • పై రెండు సందర్భాల ఆధారంగా అవృత్తవైశాల్యాన్ని సాధారణీ కరించుట. • అర్ధవృత్త వైశాల్యం – భావన వృత్తాకార బాట వైశాల్యం . • చాపము భావన అవగాహన • చాపము పొడవు • సెక్టారు భావనల అవగాహన • చాపము పొడవు, సెక్టరు కోణం మధ్యగల సంబంధంను రాబట్టుట. **సెక్టరు వైశాల్యం :** • సెక్టరు వైశాల్యంపై అవగాహన. **ఘనం, దీర్ఘఘనం** **ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘన పరిమాణం:** • దీర్ఘఘనం యొక్క వల రూపాల ఆధారంగా తలాలను గుర్తించడం. • దీర్ఘఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యాన్ని లెక్కించుట. సూత్రాన్ని రాబట్టుట.	• క్రమ వృత్తాకార శంఖువు భావన • శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తును లెక్కించడం • సెక్టరు భావన ఆధారంగా, శంఖువు ప్రక్కతల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని రాబట్టుట • శంఖువు సంపూర్ణ తల వైశాల్యా నికి సూత్రాన్ని రాబట్టుట • క్రమవృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని లెక్కించుట. • శంఖువు ఘనపరిమాణం మరియు స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం మధ్యగల సంబంధాన్ని రాబట్టుట. (LA) • **గోళం – భావన** • గోళం ఉపరితల వైశాల్యం • అర్ధగోళ ఉపరితల వైశాల్యం • అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యాలు • గోళఘనపరిమాణం	

	• **వృత్తం – చుట్టుకొలత :** • వృత్తం చుట్టుకొలత భావన – అవగాహన • వ్యాసము, చుట్టుకొలత మధ్యగల సంబంధంను ఒక స్థిరాంకం (π) ద్వారా చూపించడం • తద్వారా వృత్త చుట్టుకొలతకు సూత్రాన్ని రాబట్టడం. (LA). • దీర్ఘచతురస్రాకార, చతురస్రాకార బాటల వైశాల్యాలు లెక్కించడం.	• దీర్ఘఘన ప్రక్కతల వైశాల్యాన్ని • దాని వలరూపం ఆధారంగా లెక్కించుట సూత్రాన్ని రాబట్టుట. • సమఘనం యొక్క వలరూపాల ఆధారంగా సంపూర్ణతల వైశాల్యం. • ప్రక్కతల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని రాబట్టుట. **ఘనపరిమాణం భావన అవగాహన:** • క్యూబిక్ ఘనాల (ICC) ఆధారంగా ఘనపరిమాణ భావనను (I.C.C) అవగాహన పరుచుట. • క్యూబిక్ ఘనాల ఆధారంగా దీర్ఘ ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం నకు సూత్రాన్ని రాబట్టుట. • సమఘనం యొక్క ఘన పరిమాణంనకు సూత్రమును రాబట్టుట. • ఘనపరిమాణం, సామర్థ్యాల మధ్య బేధంను గుర్తింప జేయుట.		

2D - 3D ఆకారాలు - అవగాహన

6th	7th	8th	9th	10th
• **త్రిమితీయ ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన** • పరిసరాలలో గల వివిధ రకాల త్రిమితీయ వస్తువుల • త్రిమితీయ ఆకారాలు • దీర్ఘ ఘనం • సమఘనం • స్థూపం • శంఖువు • గోళము • పట్టకము • పిరమిడ్ • బహుభుజలు క్రమబహుభుజి	**త్రిమితీయ మరియు ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన** • పరిచయం • గోళం • స్థూపం • పిరమిడ్ • దీర్ఘఘనం • శంఖువు • సమఘనం • త్రిమితీయ ఆకారాల వలరూపాలు • ఘనాకారాలను సమతలంపై గీయడం • తుల్య రేఖా చిత్రాలు గీయడం • ఘనవస్తువులకు ఊహాచిత్రాలను ఏర్పరచుకోవడం. • ఒక ఘనం యొక్క వివిధ భాగాలను చూపుట • ఇచ్చిన వస్తువును అడ్డంగా పలుచని ముక్కలుగా కోసి చూడడం • ఘనాకార వస్తువుల నీడలు	• **త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట.** • ఘనములతో రూపొందించ బడిన త్రిమితీయ వస్తువులు • త్రిమితీయ పటములను ద్విమితీయంగా చూపుట. (Dot board / Dot paper) • వివిధ రకాల జ్యామితీయ ఘనములు • బహుముఖి ఫలకంగా కల వస్తువులు. • బహుముఖేతర ఫలకములుగా కల వస్తువులు. • క్రమబహుముఖి ఫలకములు • సమఘనము • త్రిభుజాకార పిరమిడ్ • దీర్ఘఘనము • చతురస్రాకార పిరమిడ్		

6th	7th	8th	9th	10th
		• **పట్టకము మరియు పిరమిడ్** • పట్టక భావన – వివరణ • పిరమిడ్ భావన – వివరణ • త్రిభుజాకార పట్టకం • త్రిభుజాకార పిరమిడ్ • బహుముఖి యొక్క అంచులు, తలములు, శీర్షముల సంఖ్య • అయిలర్ సూత్రం $F + V = E+2$ • త్రిమితీయ ఆకారాల వలరూపాలు • పిరమిడ్		

క్రమాకార సమతల పటాలు - చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలు

ఉపోద్ఘాతం

క్రమాకార ద్విమితీయ / సమతల పటాలు (దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, వివిధ రకాల త్రిభుజం చతుర్భుజాలు మొదలగునవి) వాని చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాలకు సంబంధించిన అవగాహనను, వీటి యొక్క అనువర్తనాలను 6 నుండి8వ తరగతి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలో చర్చించనైనది. అయితే వీటికి సంబంధించిన ప్రాథమిక అవగాహనను కొలతల అధ్యాయంలో పొడవులను లెక్కించడం ద్వారా 3, 4, 5 తరగతులలో చర్చించడం జరిగినది.

ఉదాహరణకు చుట్టుకొలత గురించి చర్చించినట్లయితే, క్రమాకార సమతల పటాల అంచుల, భుజాల పొడవులను కొలవడం, మొత్తం పొడవెంతో చెప్పడం, వివిధ బహుభుజుల ఆకారాలను బట్టి ఏది ఎక్కువ పొడవుందో, ఏది తక్కువ పొడవు ఉందో చెప్పగలగడం వంటి అవగాహనను కృత్యాల ద్వారా/ సమస్యల ద్వారా చర్చించడం జరిగింది. అయితే ప్రధానంగా ఈ క్రమాకార సమతల పటాలకు సంబంధించి వైశాల్యాలను లెక్కించడంపై ఈ స్థాయిలో అవగాహన పరుచుటకు "ఆగమనాత్మక చింతన" తో కూడిన సందర్భాలు, ఉదాహరణలు, కృత్యాలు కల్పించడం ద్వారా వైశాల్యాలను తెలుసుకోవడానికి కావలసిన సూత్రీకరణలను సాధారణీకరించడం పద్ధతిలో రాబట్టడం జరిగినది.

ఇందుకోసం దీనికి ముందు పిల్లలకు పొడవులు, వైశాల్యం భావనపై అవగాహన కల్పించాల్సి ఉంటుంది. మనం పిల్లల్లో వైశాల్యం భావనను అవగాహన చేయుటకు మొదటగా చదరపు గళ్ల కాగితం ఆధారంగా వైశాల్యాన్ని లెక్కించే అవగాహనను కల్పించాల్సి ఉంటుంది. అనగా క్రమాకార సమతల పటాలైన చతురస్రం లేదా దీర్ఘచతురస్ర పటాలను చదరపు గళ్ల కాగితంపై ఏర్పరచి అవి ఆక్రమించిన స్థలాల ఆధారంగా చదరపు గళ్లను లెక్కించి వైశాల్యంను అంచనావేసే అవగాహనను కల్పిస్తాము. ఇక్కడ మనకు కొన్ని ప్రశ్నలు ఉద్భవిస్తాయి.

- **మనం వైశాల్యంను లెక్కించడానికి చదరపు యూనిట్‌ను ప్రామాణికంగా ఎందుకు తీసుకోవాలి?**
- **పొడవులు ఏఏ యూనిట్ల కొలతలలో లెక్కించవచ్చు?**
- **వైశాల్యంను లెక్కించడంలో ప్రామాణిక కొలతను ఒక యూనిట్ చదరపు బదులు వృత్తంను కాని, ఇతర ఆకారాన్ని ఎందుకు ఎంచుకోలేము?**

- **చుట్టుకొలతలు సమానంగా ఉండే ఆకారాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయా?**
- **సమాన వైశాల్యాలు గల ఆకారాల చుట్టుకొలతలు సమానంగా ఉంటాయా?**
- **ఏయే సందర్భాలలో సమానంగా, అసమానంగా ఉంటాయి. ఎందువల్ల?**
- **సమాన వైశాల్యాలు గల వివిధ ఆకారాలు నిత్యజీవితంలో ఏవిధంగా ఉపయోగపడతాయి?**

ప్రధానంగా 6, 7, 8 తరగతులలో క్రమాకార సమతల పటాలైన దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం, సమచతుర్భుజం, సమలంబ చతుర్భుజం, చతుర్భుజం వంటి సమతల పటాల సమూహాలతో ఏర్పడే పటాల వైశాల్యాలను గణించడంపై ప్రత్యేక దృష్టి పెట్టడమైంది. ఇందుకోసం మీరు ఏ సమతల పటాల వైశాల్యాలు ఏ తరగతిలో చర్చించడం జరిగిందో గమనించాలి.

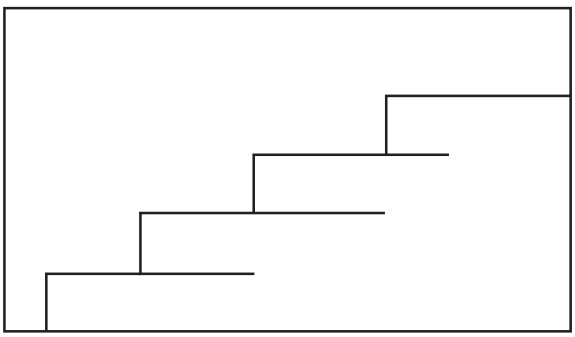
6వ తరగతిలో దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, చతురస్ర వైశాల్యములను చర్చించడమైంది. వీటి వైశాల్యాలను లెక్కించడానికి కనీసం ఏ అవగాహన అవసరము. ఏఏ భావనలు తెల్సి ఉండాల్సిన అవసరం ఉంది. ఈ రెండింటిలో దేని వైశాల్యంను గణించడంపై ముందు పరిచయం చేయాలి. దేన్ని తరువాత పరిచయం చేయాలి? ఈ రెండింటికున్న ధర్మాలు / అవగాహన వీటి వైశాల్యాలను గణించడంలో ఎలా అనుసంధానం చేయాలి? అనగా ప్రతీ ఆకారంలోగల మౌళిక ధర్మాలు, ఒక ఆకారం ఇంకో ఆకారంతో వైరుధ్యంగా ఉండడానికి గల ధర్మాలు తెలుసుకోవాల్సిన అవసరం ఉంటుంది అనేది ఉపాధ్యాయులుగా మనకు స్పష్టత ఉండాలి. మొదటగా మనం ఒక సంవృతపటం అది ఆక్రమించిన ప్రదేశమును దాని వైశాల్యంగా భావించినపుడు ఇక్కడ మనకు రెండూ సందర్భాలలో పటాలు గోచరిస్తాయి. అవి ఒకటి క్రమాకార పటాలతో కూడిన సందర్భం, రెండు అక్రమాకార పటాలతో కూడిన సందర్భం. ఇలాంటి సందర్భాలకు చెందిన పటాల వైశాల్యాలను లెక్కించడానికి మనం గళ్ల కాగితంను వాడాము. గళ్లకాగితంపై పటాలను ఏర్పరచి 1 యూనిట్ పొడవుగల చదరములను లెక్కించి వైశాల్యం అంచనా వేస్తాము. అయితే వైశాల్యాన్ని అంచనా వేయడంలో మనకు కొన్ని ప్రశ్నలు ఉద్భవిస్తాయి. వీటిని మనం స్థిరీకరించుకోవాలి.

గళ్లకాగితంపై క్రమాకార, అక్రమాకార పటాలు గీసినపుడు ఏర్పడిన పటాలలో (1) పూర్తిగా ఉండే 1 యూనిట్ చదరాలు ఉంటాయి. (2) సగంకన్నా ఎక్కువగా భాగం కల్గి ఉన్న చదరాలు, (3) సగం కన్నా తక్కువ భాగం కల్గిన చదరాలు, (4) సగభాగం కల్గి ఉన్న చదరాలు ఉంటాయి. వీటిని లెక్కించడంలో ఎలా తీసుకొంటాము. వైశాల్యాలను ఎలా అంచనా వేస్తాము అనే ఆలోచన పిల్లలతో చర్చించాలి. ఇక్కడ వారిని ఒక నిర్ణయానికి వచ్చేలా చేయాలి. పూర్తి భాగం కల్గిన చదరాలను లెక్కించడం, సగం భాగం కల్గిన చదరాలు రెండింటిని కలిపి ఒక పూర్తి

భాగం చదరంగా భావించడం సులువే. అయితే సగం కన్నా ఎక్కువ, సగం కన్నా తక్కువ భాగం కల్గిన చదరాలను వైశాల్యాన్ని అంచనా వేయడంలో ఎలా పరిగణించాలి అనేదాని గురించి ఆలోచింపజేయాలి. వేటిని జోడించడం వల్ల ఒక పూర్తి యూనిట్ చదరం ఏర్పడగలదు. అనే ఉజ్జాయింపు తార్కిక చింతనకు ప్రాముఖ్యత కల్పించాలి. ఇందుకు అనువైన మార్గం సగం కన్నా ఎక్కువ భాగం గల్గిన చదరాలను గణనలోనికి తీసుకొని, సగం కన్నా తక్కువ భాగాలు కల్గి ఉన్నా చదరాలను వదిలివేయడం వలన వైశాల్యాన్ని ఎంత దగ్గరగా అంచనావేయ గల్గుతున్నామో అవగాహన కల్గించడం ద్వారా వైశాల్యం అనగా ఆకారం ఆక్రమించిన ప్రదేశంగా భావింపజేయాలి. అలాగే భాగాన్ని వదిలివేస్తున్నామంటే – వదిలేసిన భాగం, సగం కన్నా ఎక్కువ భాగాల్లో ఏదో ఒకదానితో కలిసి సంపూర్ణభాగం అవుతుంది. అలా ప్రతీ సగం కన్న ఎక్కువ భాగం ఇంకో వదిలేసిన భాగంతో కలిసి సంపూర్ణభాగాలవుతాయనే అవగాహన కల్పించాలి.

అయితే ఈ సందర్భంగా మరొక ప్రశ్న ఉద్భవిస్తుంది. యూనిట్ చదరము అంటే ఎంత కొలతతో కూడినది. ఇక్కడ మనకు పొడవుల అవసరం ఏర్పడుతుంది. ఈ పొడవులు మనం పిల్లలకు 3, 4, 5 తరగతుల్లోనే లెక్కించడంలో అవగాహన కల్పించాము. ఇందులో అప్రమాణిక కొలతల ద్వారా పొడవులను అంచనావేయడం. మొదలుకొని ప్రామాణిక కొలతల అవసరాన్ని చర్చించి అవగాహన కల్పించారు. అయితే ఈ తరగతుల్లో పిల్లలకు నిత్యజీవితంలో విరివిగా వాడే పొడవులు మిల్లీ మీటరు, మీటరు, సెంటి.మీటర్లు, కిలోమీటరు వాటి మధ్య సంబంధం. చర్చించి వాటి వినియోగాన్ని అభ్యాసం చేసారు. అట్లే వివిధ ఆకారాల చుట్టుకొలతలను స్కేలు సాయంతో, టేపుసాయంతో మి.మీ., సెం.మీ, మీటర్లలో కొలవడం, ఇచ్చిన వివిధ పటాల అంచుల పొడవులను (మి.మీ., మీటరు, సెం.మీలను) పరిశీలించడం ద్వారా చుట్టుకొలతలను లెక్కించడం చేసి యున్నారు. కావున ఈ అవగాహనను మనం వైశాల్యం లెక్కించే / అంచనావేసే సందర్భంలో యూనిట్ చదరంను తీసుకొని దాని అంచుపొడవు. 1 మి.మీ. గాని, 1 సెం.మీ. గాని 1 మీటరుగాని తీసుకొన్నాము. అయితే ఇక్కడ యూనిట్ ప్రమాణము అనేది ఆక్రమించిన స్థలం / ప్రదేశాన్ని బట్టి సెం.మీ. గాని, మీటరు గాని, ఇంకా ఇతర పెద్ద పొడవు (కొలత) లేదా చిన్న పొడవు (కొలతను) తీసుకొనే అవకాశం ఉంటుంది.

పై భావనలలో (కొలతలలో) వరుస భావనలను ప్రక్కపటంలో సూచించండి.



కాబట్టి మనం నోటు పుస్తకాలలో గీసిన పటాల ఆధారంగా సెం.మీ. గాని మీటరు గాని తీసుకొని యూనిట్ చదరాన్ని 1 చ.సెం.మీ. అని లేదా 1 చ.మీ. అని గణిస్తుంటాము.

అయితే ఇక్కడ మనకు మరొక ప్రశ్న తలెత్తుతుంది. మరి ఇలా ప్రతిసారి ఒక యూనిట్ కొలత చదరాలను లెక్కించడం ద్వారా వైశాల్యాన్ని అంచనా వేయడం. ప్రతి సందర్భంలో సాధ్యపడుతుందా? దీనికి ఎంత సమయం వెచ్చించాలి? ఖచ్చితమైన లెక్కింపు చేయగలరా? దీనికి సమాధానము వెతకడానికి మనం గణితంలో ఆగమనాత్మక చింతనను వినియోగిస్తున్నాము. అనగా వివిధ ఉదాహరణలు, పరిశీలన ద్వారా, క్రమాల ద్వారా సాధారణీకరించి సూత్రీకరణ చేస్తున్నాము. తద్వారా ఇచ్చిన సమతల పటాలైన దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రంల వైశాల్యాన్ని లెక్కించడము చేశాము.

మనం 6వ తరగతిలో పై రెండు సమతల పటాల వైశాల్యంను లెక్కించడంలో మొదట దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని గణించడానికి సూత్రీకరణ (సాధారణీకరణ రూపం)ను పొడవు, వెడల్పుల లబ్ధంగా నిర్ధారించాము. చతురస్రాల్లో పొడవు, వెడల్పులు సమానంగా ఉండం వల్ల వైశాల్యాలను యూనిట్ చదరాలుతో కొలవడం సులభమవుతుంది. చదరాలన్నా చతురస్రాలన్నా ఒకటే. యూరోపియన్లు రెండింటికీ ఒకే పదం 'స్క్వేర్'గా వాడుతున్నారు. తెలుగులో వైశాల్యాన్ని కొలవడానికి చదరమని, ఆకారానికి "స్క్వేర్" అని పిల్లలు నేర్చుకున్న ఏభావన / అవగాహన దోహదపడిందో ఆలోచించండి. పొడవు, వెడల్పు అనే రెండు పదజాలాలను ఇక్కడ ఎందుకు ఉపయోగించారు? దీర్ఘచతురస్రం యొక్క ధర్మాలను, ఎలా మల్చుకోవాలో బట్టి ఈ విషయాన్ని గ్రహిస్తామా? దీర్ఘచతురస్రంలో ఆసన్న భుజాల పొడవులు వేరువేరు కొలతలు కల్గిఉన్నందున ఈ సందర్భం ఏర్పడిందని గుర్తించవచ్చా? లేదా కొన్ని సందర్భాలలో రెండు ఆసన్న భుజాల కొలతలు కూడ సమానంగా ఉండవచ్చు కదా!

పై విధంగా ఆలోచించినప్పుడు ఈ రెండు సందర్భాలతో కూడిన సమతల పటాలలో అన్ని సమానం పొడవులు గల ఆసన్న భుజాల మధ్య కోణాలు 90^0 ఉంటాయి. కావున గళ్ళచదరాళ్లను సులభంగా లెక్కించవచ్చు. ఇంకా ఇలా లెక్కించడంలో గుణకార భావనలో ఒక సందర్భం. "Array" అనగా అడ్డు, నిలువు వరుసలోని వస్తువులను లెక్కించడం ఆధారంగా మొత్తం ఎన్ని చదరాలు ఉంటాయో చెప్పే అవగాహన ఇక్కడ పిల్లలకు దోహదపడుతుంది. ఈ అవగాహనతో గళ్ళచదరముపై వివిధ పొడవు, వెడల్పులు కల్గిన దీర్ఘచతురస్రాలను ఏర్పరచినపుడు వాటి అంచుల వెంబడి పొడవు, వెడల్పులు ఉన్న చదరాలను లెక్కించడం ద్వారా దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం సాధారణీకరించి సూత్రీకరణ చేయడం జరిగింది.

దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం	= పొడవు × వెడల్పు (చ.యూ)
(A)	$= l \times b$ (sq.units)

- దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం $l = b$ అయినప్పుడు ఏం జరుగుతుంది. వైశాల్యాన్ని ప్రయోగాత్మకంగా ఏలా లెక్కించాలి?

- చతురస్రంలో ఆసన్న భుజాలు పొడవులు సమానం. అంటే పొడవు, వెడల్పులు సమానంగా ఉంటాయి. కాబట్టి ప్రత్యేకంగా పొడవు, వెడల్పు లని సూచించకుండా భుజం (side) తో సూచించడం వలన చతురస్ర వైశాల్యానికి సాధారణీకరణ రూపంగా (సూత్రీకరణ)ను ఊహించగలరా ?

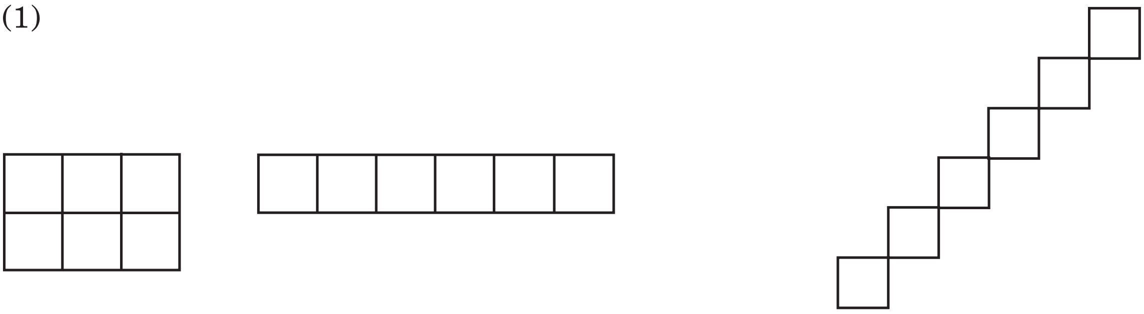
చతురస్రవైశాల్యం	=	భుజం × భుజం
A	=	$s \times s$
A	=	s^2 చ.యూ

ఇచ్చిన కొలతలతో గూడిన చదరాన్ని గ్రాపు కాగితంపై గీసి చదరపు గళ్లను లెక్కించిన దానివైశాల్యము పై సూత్రీకరణ ద్వారా లెక్కించిన వైశాల్యానికి సమానమైతుందా? ఎందుకు.

దీర్ఘ చతురస్రవైశాల్యం, చతురస్ర వైశాల్యాల భావన ఆధారంగా వాటి భుజాల కొలతలలో మార్పులు అనగా తగ్గిన, లేదా పెరిగిన వైశాల్యంలో మార్పు ఎలా చోటు చేసుకుంటుంది. అలాగే ఒకే చుట్టుకొలత గల్గిన రెండు దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలను పోల్చడము, ఒకే వైశాల్యం కల్గిన, దీర్ఘచతురస్రాల చుట్టుకొలతలను పోల్చడం. వాటికి తగు కారణాలు వివరించడం గల స్థాయికి పిల్లల్లో ఆలోచనను కల్గించాలి.

ఇందుకోసం మీరు ఒక చదరపు యూనిట్ గల చదరాలను తీసుకొని వాటిని వేరువేరు ఆకారాలలో అమర్చినపుడు అందులో కొన్ని వేరువేరు చుట్టుకొలతలు కల్గి ఉంటాయి అనే భావనను కల్పించవచ్చు.

ఉదా: (1)

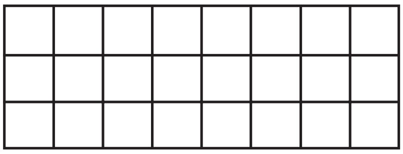


వైశాల్యం = 6 చ.యూ.	వైశాల్యం = 6 చ.యూ.	వైశాల్యం = 6 చ.యూ.
చుట్టుకొలత = 10 యూనిట్లు	చుట్టుకొలత = 14 యూనిట్లు	చుట్టుకొలత = 24 యూనిట్లు

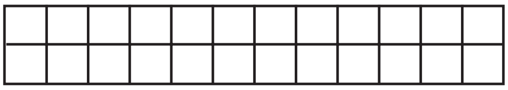
పై ఉదాహరణలలో సూచించినట్లు 6 చ.యూనిట్లు వైశాల్యంగల యూనిట్ చదరాలను మూడు వేర్వేరు చుట్టుకొలతలుగల ఆకారాలుగా పేర్చాము.

1. వైశాల్యాలు సమానంగా ఉండి చుట్టుకొలతలు వైరుధ్యంగా ఉండే అమరికలను అమర్చండి.
2. ఇలా గరిష్ఠ, కనిష్ఠ చుట్టుకొలతల అమరికను గుర్తించండి.

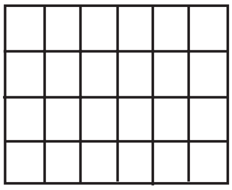
ఉదాహరణ :- 24 చ.యూనిట్లు వైశాల్యం కల్గిన యూనిట్ చదరాలను వేర్వేరు చుట్టకొలతలు గల్గిన ఆకారాలుగా ఎన్ని విధాలుగా పేర్చవచ్చో చూద్దాం.



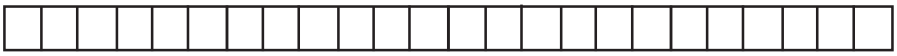
వైశాల్యం : 24 చ.యూ.
చుట్టుకొలత : 22 యూ



వైశాల్యం : 24 చ.యూ.
చుట్టుకొలత : 28 యూ



వైశాల్యం : 24 చ.యూ.
చుట్టుకొలత : 20 యూ



వైశాల్యం : 24 చ.యూ.
చుట్టుకొలత : 50 యూనిట్లు

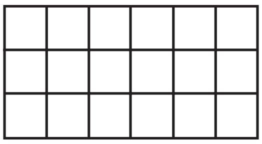
- చదరాలను వివిధ రకాలుగా అమర్చినపుడు వచ్చే చుట్టుకొలత పొడవుల పరిమాణాలలో గరిష్ఠంగా, కనిష్ఠంగా రాగలిగిన సంఖ్యలేవి.

పై విధంగానే మనం చతురస్రంలలో కూడా చెప్పవచ్చా ?

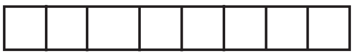
అనగా ఒకే వైశాల్యం కల్గిన చతురస్రాలను రెండు వేర్వేరు చుట్టుకొలతలు గల్గిన చతురస్రాలుగా పేర్చవచ్చా? ఎందుకు?

చుట్టుకొలత సమానంగా వైశాల్యాలు వైరుధ్యంగా ఉండే అమరికలు అమర్చండి.

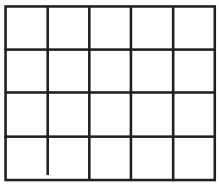
ఒకే చుట్టుకొలతలు గల్గి ఉండు వేర్వేరు దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలు సమానమేనా? లేదా పరిశీలిద్దాము.



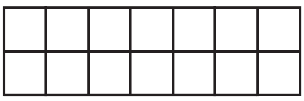
చుట్టుకొలత: 18 యూ.
వైశాల్యం:18చ.యూ



చుట్టుకొలత : 18 యూ.
వైశాల్యం : 8యూనిట్లు



చుట్టుకొలత : 18 యూ.
వైశాల్యం : 20చ.యూ.



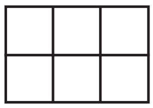
చుట్టుకొలత : 18 యూ.
వైశాల్యం : 14 చ.యూ.

ఈ సందర్భాలను పరిశీలించినప్పుడు అన్ని పటాల చుట్టుకొలత సమానము. కాని అవి ఆక్రమించిన స్థలము (ప్రదేశము) కొలత వేర్వేరుగా ఉంది.

పై సందర్భాలు చతురస్రాలలో వీలైతుందా ? ఆలోచించండి? ఎందుకు.

మరొక సందర్భం గురించి ఆలోచిద్దాం !

ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పులు రెండు రెట్లు పెరిగినపుడు వాటి వైశాల్యంలో, చుట్టుకొలతల్లో ఎలాంటి మార్పును గమనించవచ్చు.

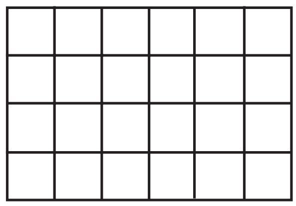


పొడవు = 3 యూ.

వెడల్పు = 2 యూ.

చుట్టుకొలత = 10 యూ.

వైశాల్యం = 6 చ.యూ.



పొడవు = 3 × 2 రెట్లు = 6 యూ.

వెడల్పు = 2 × 2 రెట్లు = 4 యూ.

చుట్టుకొలత = 20 యూ.

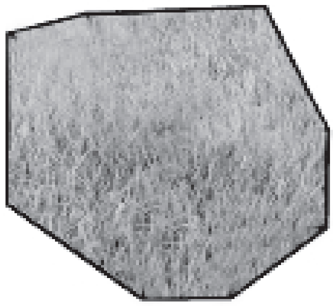
వైశాల్యం = 24 చ.యూ.

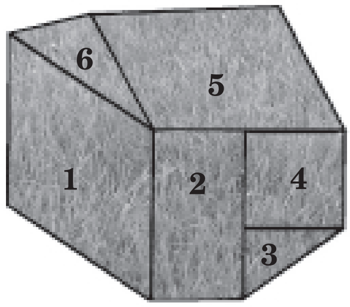
పై సందర్భాన్ని పరిశీలిస్తే అనగా గళ్ల చదరాల ఆధారంగా ఏర్పడిన ఆకారాన్ని పరిశీలించగా చుట్టుకొలత రెండు రెట్లు పెరిగితే వైశాల్యం. 4 రెట్లు పెరిగిందని తెలుస్తుంది.

అనగా మొదటి దీర్ఘ చతురస్రానికి నాలుగు రెట్లు పెద్దగా రెండవ దీర్ఘచతురస్రం ఉంటుందని గోచరిస్తుంది.

అలాగే ఒక దీర్ఘచతురస్రం తీసుకొని దాని పొడవు 2రెట్లు, వెడల్పు 3 రెట్లు ఉండేలా ఏర్పరిస్తే వాటి చుట్టుకొలత, వైశాల్యంలో మార్పు ఎలా ఉంటుంది. మార్పు కొలతలతో ఏర్పడే ఆకారం గురించి చర్చించండి.

మనము క్రమకార సమతల పటాలను పరిశీలిస్తే ఒకే సమతలంలో రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ ఆకారాలు జతపరచి ఉండడం చూస్తుంటాము. ఇలాంటి పటాల వైశాల్యాలను మనం నేరుగా లెక్కించలేము. వీటిని లెక్కించడానికి ఆ పటం ఏఏ సమతల పటంతో కూడిన ఆకారాలతో ఏర్పడిందో గుర్తించగల్గాలి. మనము 7వ తరగతిలోని పాఠ్యపుస్తకంలో ఇచ్చినన ఒక పటం గురించి ఆలోచిద్దాం.



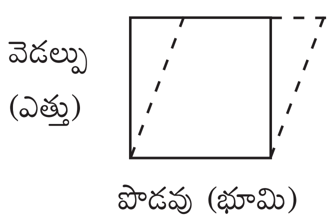


పైపటాన్ని పరిశీలిస్తే ఈ పటము / ఆకారాలు వివిధ సమతల పటాలతో ఏర్పడినట్లు భావిస్తాము. ఇది 1. సమాంతర చతుర్భుజం 2. దీర్ఘచతురస్రం, 3. త్రిభుజం, 4. చతురస్రం, 5. సమాంతర చతుర్భుజం. 6. త్రిభుజంల కలయికతో ఏర్పడింది. ఈ పటం వైశాల్యాన్ని లెక్కించాలంటే ఈ సమతల పటాల వైశాల్యాలను లెక్కించి వాటి వైశాల్యల మొత్తం ఆ పట వైశాల్యంగా చెప్పవచ్చు. ఇందుకు అవసరమైన పొడవులు, వాటి కొలతలు తీసుకొని సంబంధిత ఆకారాలు / పటాలు వైశాల్యాలు లెక్కించాలి. మనం 6వ తరగతిలో దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాకార పటాల వైశాల్యాల లెక్కించడం తెలుసుకొన్నాము. అయితే ఈ పటంలో మనకు త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం అవసరాలకు కూడా వైశాల్యాలను లెక్కించడం పరిశీలిద్దాం.

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని త్రిభుజవైశాల్యాన్ని లెక్కించడంలో కింది తరగతిలో నేర్చుకున్న ఏ అవగాహన మనకు ఉపయోగపడుతుందని భావిస్తున్నారు ?

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని, త్రిభజ వైశాల్యాన్ని లెక్కించడంలో దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యంతో ఏమైన సంబంధముందా?

పై రెండు ప్రశ్నలు గురించి ఆలోచిస్తే సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యం, త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని లెక్కించడం కోసం కావలసిన సూత్రీకరణ (సాధారణీకరణ) చేయడం సులువవుతుంది.



సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి, దాని ఎత్తు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పుకు ఎలా సమానమైతున్నాయి? పాఠ్యపుస్తకంలో 244 పేజీలో ఇచ్చిన కృత్యాన్ని పరిశీలించండి.

దీని ఆధారంగా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

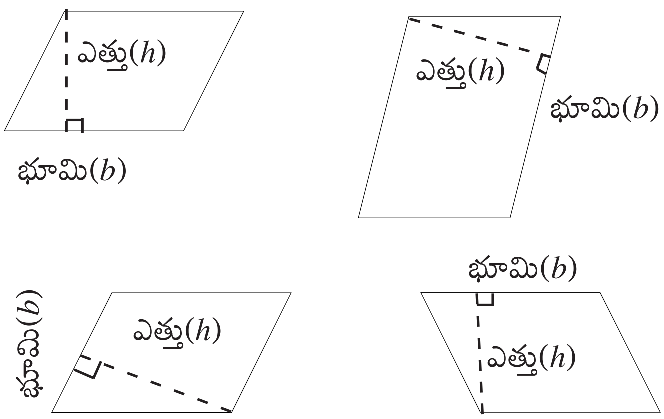
= పొడవు × వెడల్పు

= భూమి × ఎత్తు

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం దాని విలువ భూమి, ఎత్తుల లబ్ధానికి సమానము అని సాధారణీకరణ చేయుటకు వివిధ సమాంతర చతుర్భుజాలను గ్రాఫ్ కాగితంపై గీసి యూనిట్ చదరాలను లెక్కించడం ద్వారా సూత్రీకరణను స్థిరీకరించవచ్చు.

- భూమికి బదులు పొడవు, ఎత్తుకి బదులు వెడల్పులను వాడవల్సిన అవసరం ఏంటి?

ఐతే సమాంతర చతుర్భుజంలో ఏ భుజానైనా భూమిగా ఎంచుకోవచా? ఈ అవగాహన చాలా ముఖ్యం. దీని ఆధారంగా ఆసమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంను కనుగొనడానికి కావల్సిన భూమి, ఎత్తులను నిర్ధారించవచ్చు. కింద అలాంటి కొన్ని సందర్భాలు ఇవ్వబడ్డాయి పరిశీలించండి.



సమాంత చతుర్భుజాల వైశాల్యలు లెక్కించడంలో ఇక్కడ ఇంకో విషయాన్ని గుర్తించాలి.

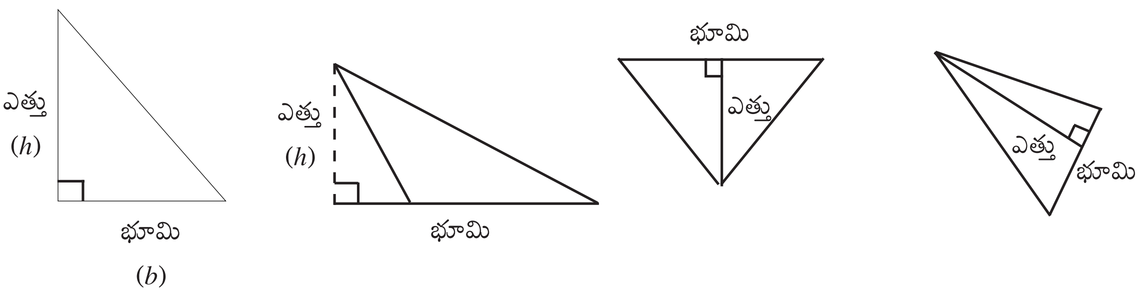
ఇందుకు తగిన కారణాలు ఏమై ఉంటాయి?

"ఒకే భూమి కల్గి సమాన ఎత్తుగల సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయి"

"దీనినే మనం ఒకే భూమి కల్గి రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య ఉండే సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానము". అనే సిద్ధాంతీకరణ వైపు చర్చించే సందర్భంలో వైశాల్య అవగాహన ఎలా ఉపయోగపడుతుంది?

త్రిభుజ వైశాల్యమును లెక్కించడంలో కూడా దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యం అవగాహనను ఎలా వినియోగించుకోవాలి అనే స్పష్టత కల్గి ఉండాలి. మీరు పాఠ్యపుస్తకంలో 248 పేజి నుండి 250 పేజి వరకు ఉన్న చర్చను అవగాహన చేసుకోవాలి. ప్రధానంగా ఇక్కడ ప్రస్తావించిన అంశాలు పరిశీలిద్దాం.

దీర్ఘ చతురస్రంలో భాగంగా త్రిభుజాలు, సమాంతర చతుర్భుజంలో భాగంగా త్రిభుజాన్ని పరిశీలించినప్పుడు మనము గుర్తించే అంశము. వీటిలోని ఎదురెదురు శీర్షాలను కలుపుతూ రేఖాఖండంను (కర్ణం) గీసినపుడు అవి వాటిని రెండు సమాన ప్రదేశాలు గల్గిన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని గుర్తిస్తాము. అప్పుడు ఆ త్రిభుజవైశాల్యములు దీర్ఘచతురస్రం / సమాంతర చతుర్భుజంలో సగం ఉంటుంది. ఇక్కడ మనం త్రిభుజ వైశాల్యంనకు సంబంధించిన వైశాల్య సూత్రీకరణ కొరకు సాధారణీకరణం చేస్తూ ఆలోచనలు చేయవచ్చు. మొదటగా మనం దీర్ఘచతురస్రంలో భాగంగా త్రిభుజంను మాట్లాడినపుడు ఇక్కడ ఏర్పడే త్రిభుజాలు లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుంది. అలాగే సమాంతర చతుర్భుజంలో భాగంగా త్రిభుజాన్ని చర్చించినపుడు ఇది అధికకోణ త్రిభుజం అవుతుంది. అయితే మనం త్రిభుజవైశాల్యం ఒక లంబకోణ త్రిభుజం, అధికకోణ త్రిభుజానికే పరిమితం చేయకుండా ఏ ఇతర త్రిభుజాలకై వర్తిస్తుందని చెప్పాలి. అందుకే మనం పాఠ్యపుస్తకంలోని 249 పేజిలో గ్రాపుపేపర్ (చదరపు గళ్ల కాగితం)పై అల్పకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచి అటు సూత్రము ఆధారంగా, ఇటు చదరపు గళ్ళను లెక్కించడం ద్వారా త్రిభుజ వైశాల్యానికి సూత్రీకరణ చేసి త్రిభుజ వైశాల్యం దాని భూమి (b), ఎత్తు (h) లబ్దంతో సగం ఉంటుందని చెప్పాము. దీని ఆధారంగా వివిధ త్రిభుజాలకు, వైశాల్యాలను కనుగోనే సమస్యాసాధనలను ఇచ్చాము. త్రిభుజాలకు త్రిభుజం యొక్క వేరువేరు భుజాలు భూమిగా తీసుకున్నప్పుడు ఎత్తులు ఎలా తీసుకోవాలో కింది పటాలలో చూపడమైంది. వాటిని పరిశీలించండి.



- ఏదైనా ఒక త్రిభుజంలో ఎత్తు, భూములను నిర్ధారించడానికి వ్యూహాలను ఆలోచించండి. ఒకే త్రిభుజానికి ఎన్ని రకాలుగా ఎత్తు, భూములు ఉండవచ్చు.

త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}\times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

త్రిభుజవైశాల్యాన్ని గణించ గలిగే విద్యార్థులు దాని వైశాల్యానికి సంబంధించి లోతైన ఆలోచన చేయడానికి పాఠ్యపుస్తకంలో పేజి 250లో "ప్రయత్నించండి" శీర్షికలో ఒక కృత్యం ఇవ్వడమైంది. "వివిధ త్రిభుజాలు ఒకే భూమిని కల్గి ఉన్నపుడు వాటి ఎత్తులు సమానమైతే వాటి వైశాల్యాలు సమానమేనా" ఖచ్చితంగా మనం లెక్కించినపుడు సమాన మవుతుందని గ్రహిస్తాము. ఈ అవగాహనను మనము" ఒకే భూమిని కల్గి రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య ఉండే ఆ రెండు త్రిభుజవైశాల్యాలు సమానం" అనే సిద్ధాంతీకరణ కొరకు జరిగే చర్చలో పై వైశాల్యాల భావన అవగాహన కల్పిస్తుంది. చర్చ వ్యూహాలను, నిర్ధారించిన కారణాలను ఊహించండి.

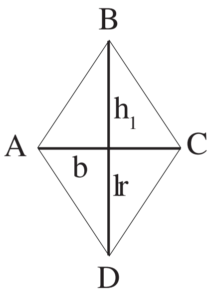
సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను చర్చించే సందర్భంలో ఇక్కడ మనం తొలుత ఇది ఎలా ఏర్పడింది. దీని ధర్మాలు అవగాహన అవసరం. వివిధ రకాల త్రిభుజాలను వాటి భూములను శీర్షాలు సరిపడునట్లు కల్పి వివిధ సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏర్పరచవచ్చు. ఇలా ఏర్పరచినపుడు అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏ సందర్భంలో ఏర్పడతాయి గుర్తించాలి. తద్వారా "అన్ని భుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమచతుర్భుజం (రాంబస్)" అంటారని అవగాహన చేసుకుంటారు.

రాంబస్‌ను ఎన్ని త్రిభుజాల సంయోజనంగా తెలుపవచ్చును.

త్రిభుజవైశాల్యాలను కలిపితే రాంబస్ వైశాల్యం వస్తుందా?

యూక్లిడ్ ఏ స్వీకృతం దీన్ని బలపరుస్తుంది. చతురస్ర వైశాల్యంను ఈ విధంగా కనుగొంటే వైశాల్య సూత్రమే వస్తుందా?

త్రిభుజవైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించారు. ఇక్కడ అదే పద్ధతిని ఉపయోగిస్తే రాంబస్ వైశాల్యానికి సూత్రీకరణ చేయవచ్చు.



ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో

$h_1 + h_2 =$ కర్ణం

b = AC కర్ణం

పై రాంబస్ వైశాల్యం = ΔABC వైశాల్యం + ΔACD వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times b \times h_1 + \frac{1}{2} \times b \times h_2$$

$$= \frac{1}{2} \times b(h_1 + h_2)$$

సమచతుర్భుజ వైశాల్యం దాని కర్ణాల లబ్ధంలో సగం ఉంటుంది.

అలాగే ట్రెపిజియమ్, చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు కూడా కనుగొనడానికి వాటిని రెండు త్రిబుజాలుగా విభజించి సూత్రీకరణ చేయవచ్చు.

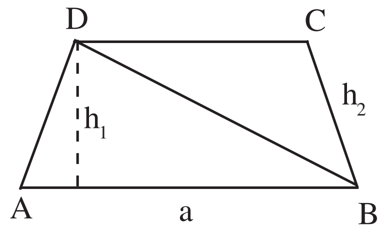
ట్రెపీజియం వైశాల్యం :

ట్రెపిజీయం లక్షణాలు చతురస్రం, రాంబస్‌లో ఏవిధంగా వైరుధ్యంగా ఉంటాయి. చతురస్రం, రాంబస్ ట్రెపిజీయాలలో ఎన్నెసి త్రిభుజాలను సంయోజనంగా చెప్పవచ్చు ఏర్పడే త్రిభుజాలలో తేడాలుంటాయా?

ABCD ట్రెపిజియం వైశాల్యం = ΔABD వైశాల్యం + ΔBCD వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times a \times h + \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$= \frac{1}{2} h\ (a + b)$$

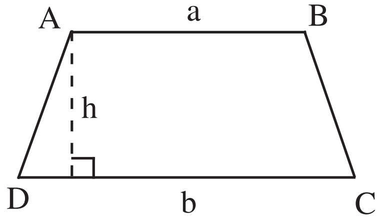


ట్రెపిజియం వైశాల్యం దాని ఎదురెదురు సమాంతర భుజాల మొత్తం పొడవు మరియు వాటి మధ్య లంబ దూరంల లబ్ధంలో సగం ఉంటుంది.

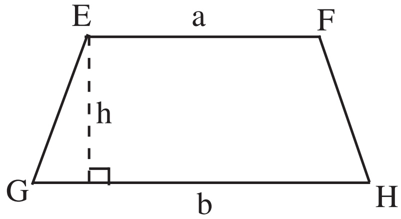
Lab Activity :

దీని వైశాల్యాన్ని మరొక పద్ధతిలో తెలుసుకొని సూత్రీకరణ సరైనదేనని భావిద్దాం.

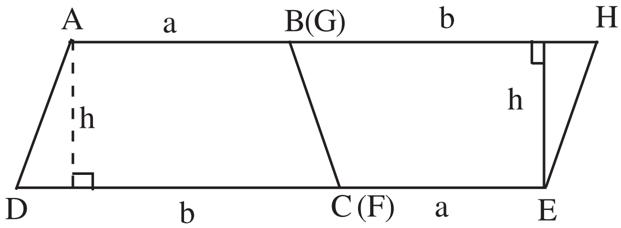
1. ABCD ట్రెపిజియంను గీద్దాం.



2. "ABCD" కి సరూపంగా ఉండేలా EFGH అనే మరొక ట్రెపిజియంను గీద్దాము. (ABCD, EFGH ఒక దానిపై ఒకటి ఉంచితే ఒకే ట్రెపీజియంలా కనబడాలి).



3. కింద పటంలో చూపినట్లు F శీర్షము C కి అనుకొనేలా, G శీర్షము B కి అనుకొనేలా కింది విధంగా రెండు ట్రెపిజియంలోను ఒకదాని ప్రక్కన మరొకటి అమర్చండి.



4. పరిశీలించగా అమర్చగా ఏర్పడిన పటము సమాంతర చతుర్భుజం.

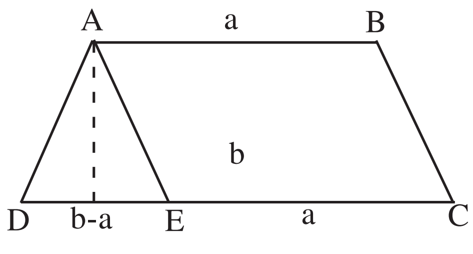
$\therefore$ పై సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యం = $\frac{1}{2}\times(a+b)\times h$

ఇది ట్రెపిజియం వైశాల్యం అవుతుంది.

పై రెండు సందర్భాల ద్వారా ట్రెపిజియం వైశాల్యంనకు సూత్రీకరణ చేశాము.

అయితే ట్రెపిజియం (సమలంబ చతుర్భుజం)లు ఏర్పడే వివిధ సందర్భాలు పరిశీలిద్దాం.

Case I : సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజాలతో ఏర్పడే సందర్భం.



ABCD సమలంబ చతుర్భుజంను ΔADE, త్రిభుజంగా ABCE సమాంతర చతుర్భుజంలుగా విడదీయవచ్చు.

కావున ABCD సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం = ΔADE వైశాల్యం + ABCE సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం.

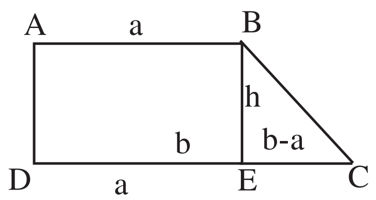
$$= \frac{1}{2}\times(b-a)\times h + ah$$

$$= \frac{bh - ah + 2ah}{2}$$

$$= \frac{bh + ah}{2} = \frac{h}{2}(a+b)$$

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం $= \frac{1}{2}.h.(a+b)$

Case II : త్రిభుజం, దీర్ఘచతురస్రం ఏర్పడే సందర్భం.



ఇక్కడ ABCD సమలంబ చతుర్భుజాన్ని ABED దీర్ఘచతురస్రం, BEC త్రిభుజంగా విడదీయవచ్చు.

కావున ABCD సమలంబచతుర్భుజ వైశాల్యం = ABED దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం + ΔBEC వైశాల్యం

$$= ah + \frac{1}{2}(b-a) \times h$$

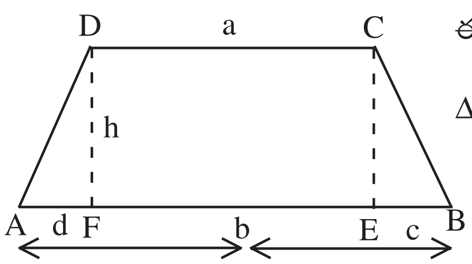
$$= ah + \frac{1}{2}bh - ah$$

$$= \frac{2ah + bh - ah}{2}$$

$$= \frac{bh + ah}{2} = \frac{1}{2} \times h(a+b)$$

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం $= \frac{1}{2}.h.(a+b)$

Case III : రెండు త్రిభుజాలు, ఒక దీర్ఘచతురస్రంతో ఏర్పడే సందర్భం.



ఈ ABCD సమలంబ చతుర్భుజం DCEF దీర్ఘచతురస్రం ΔDAF, ΔEBC లతో ఏర్పడింది.

కావున ABCD సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం = DCEF దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం + ΔDAF వైశాల్యం + ΔEBC వైశాల్యం

$$= ah + \frac{1}{2}dh + \frac{1}{2}ch$$

$$= ah + \frac{1}{2}h(c+d)$$

$$= ah + \frac{1}{2}h(b-a)$$

$$= ah + \frac{1}{2}(bh-ah)$$

$$= \frac{2ah + bh - ah}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(bh-ah)$$

$$= \frac{1}{2}.h.(a+b)$$

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం $= \frac{1}{2}.h.(a+b)$

పై Case I, Case II, Case III సందర్భాలలో కూడా సమలంబ చతుర్భుజవైశాల్యం దాని సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం మరియు వాటి మధ్య లంబదూరంల లబ్ధములో సగం ఉంది. అని తెలుస్తుంది. ఈవిధంగా ప్రతి సందర్భంలో సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని సాధారణీకరించి సూత్రీకరణ చేయవచ్చు.

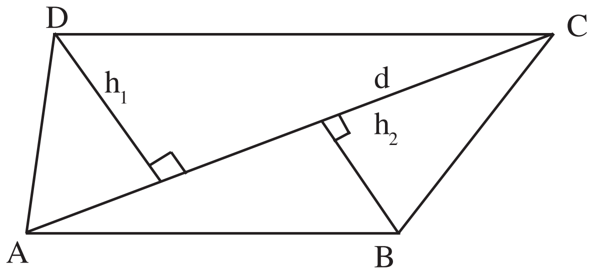
Lab Activity :

పాఠ్యపుస్తకం పేజి సంఖ్య 203 (8వ తరగతి) లోని సమలంబ చతుర్భుజంను "కృత్యం"ను పరిశీలించండి. ఆ కృత్యం ద్వారా కూడా సమలంబ చతుర్భుజంలను చదరపు గళ్ల కాగితంపై గీసి, దాని త్రిభుజాకారంగా మార్చి సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యంను చదరపు గల్లలను లెక్కించడం ద్వారా, త్రిభుజము, సమలంబ చతుర్భుజము ఆక్రమించిన ప్రదేశము సమానము అని చూపడం ద్వారా వైశాల్యాన్ని గణించే పద్ధతిని చూపారు.

ఏ పద్ధతి ఎంచుకున్న దాని కున్న అవి ఏర్పడే సమతల పటాల సముదాయం, ఆక్రమించే ప్రదేశాలు (వైశాల్యాల) ఆధారంగా గణించే విధానమును అవగాహన పరచాలి. తద్వారా ఏరకమైన సమతల పటాలు ఏర్పడిన వాటి వైశాల్యాలు గణించే మార్గము అన్వేషింపచేయాలి.

చతుర్భుజం :

చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని లెక్కించడం కూడ అది ఏఏ సమతల పటాల సముదాయమో గుర్తించడం ద్వారా సూత్రీకరణ చేయవచ్చు.



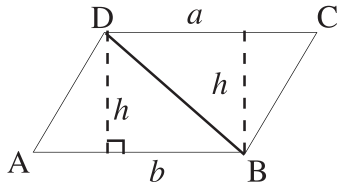
ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం = ΔACD వైశాల్యం + ΔABC వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}dh_1 + \frac{1}{2}dh_2$$

$$= \frac{1}{2}d.(h_1 + h_2)$$

కావున చతుర్భుజ వైశాల్యం దాని కర్ణము పొడవు మరియు కర్ణముపైకి మిగిలిన రెండు శీర్షముల నుండి గీచిన లంబ పొడవుల మొత్తం లబ్ధంలో సగం ఉంటుంది.

అయితే ఇక్కడ మనము ఒక విశ్లేషణ చేయవచ్చు. పై ఒక సందర్భంతోనే చతుర్భుజ వైశాల్యంను దాని కర్ణము పొడవు మరియు కర్ణముపై మిగిలిన రెండు శీర్షముల నుండి గీచిన లంబ పొడవుల మొత్తం లబ్ధంలో సగం ఉంటుందని చెప్పడం సరైందేనా అనే సందేహం కల్గవచ్చు. కావున ఇక్కడ మనం చతుర్భుజాల ఒక ధర్మాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. సమాంతర చతుర్భుజం, ఒక చతుర్భుజం అని మనకు తెలుసు. సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని మనకు గణించడం తెలుసు.



పై సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = bh

పై చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ah \;=\; \frac{1}{2}.h.(a+b) = \frac{1}{2} \times h \times 2b = bh$

కావున సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం అవగాహన చతుర్భుజ వైశాల్యం అవగాహనతో సరిచూసుకోవచ్చు.

6, 7, 8 తరగతులలో ఉన్న వివిధ సమతల పటాలను పరిశీలిస్తే వీటి సముదాయాలతో ఏర్పడే పటాలవైశాల్యాలను సులువుగా కనుగొనవచ్చు. ఈ సముదాయాలతో ఏర్పడే పటాలు నిత్యజీవితంలో ఉండే క్షేత్రాలకు అనుసంధానం చేయడం. వైశాల్యాలు లెక్కించడంపై అవగాహన కల్పించాలి.

వృత్తం - పరిధి, వైశాల్యాలు, సెక్టరు వైశాల్యాలు

ఉపోద్ఘాతం

దైనందిన జీవితంలో మనకు కనబడే వస్తువులు, నిర్మాణాలు మొదలైన వాటిలో వివిధ రకాల ఆకారాలు, ఆకృతులు గమనించవచ్చు. అందులో త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు మరియు వీటితోపాటు వృత్తాకార వస్తువులు నిర్మాణాలు కూడా ఉన్నాయని గమనించవచ్చు.

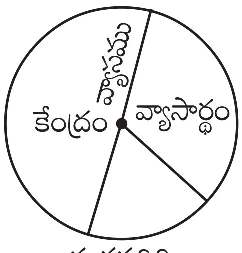
వృత్తాకారంలో వస్తువులు లేకపోయినట్లైతే. మనకు దైనందిన జీవితం ఎలా ఉండేదో ఊహించండి.

బండి చక్రాలు, వివిధ వాహనాల చక్రాలు, ఫుట్‌బాల్, రింగ్‌బాల్ (వృత్తాకారం లేకుండా గోళాన్ని, కంకణాకార వస్తువులను ఊహించలేం కదా!)

సమతల పటాలలో త్రిభుజాలు, వివిధ రకాల చతుర్భుజాల చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాల గురించి ఇదివరకే తెలుసుకున్నాం.

మరి వృత్తాకార వస్తువుల తయారీలో చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాల అవసరం. ఏమిటో ఊహించండి?

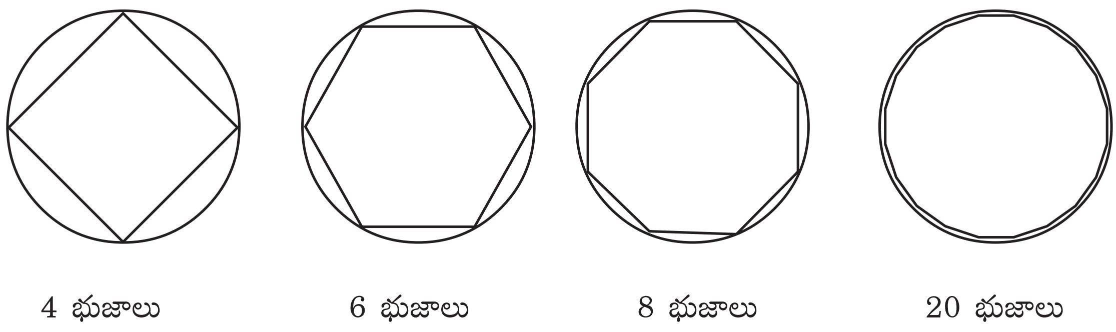
వృత్తం యొక్క చుట్టకొలతను కనుగొనవలసిన అవసరాన్ని పిల్లలు అవగాహనపరుచుకొనేందుకై 6వ తరగతిలోని 'ప్రాథమిక జ్యామితి భావనలు' అనే అధ్యాయంలోని వృత్తము - వృత్త భాగాల గురించి వివిధ కృత్యాల ద్వారా పిల్లలు అవగాహనపరచుకొనేలా? అభ్యసన వాతావరణం కల్పించాలి.



పై పటాన్ని గమనించండి. వృత్తమే కదా?

పై వృత్తము ఎలా ఏర్పడి ఉండవచ్చు?

క్రింది చిత్రాలను గమనించండి.



పై క్రమాలను ఆలోచిస్తే అనంత భుజాలు కలిగిన బహుభుజియే వృత్తం అని తెలుస్తుంది.

ఒక సైకిల్ చక్రాన్ని తీసుకొని దాని చువ్వల పొడవులను కొలవండి. వాటి పొడవులు ఎలా ఉన్నాయి?

పై విధంగా విద్యార్థులను ఆలోచింపజేస్తూ, వ్యాసము, వ్యాసార్ధము మరియు కేంద్రముల గురించి అవగాహన పరచుకొనేలా ప్రోత్సహించాలి. దీనికోసం 6వ తరగతిలోని పేజి నంబర్ 57లో సూచించిన వృత్తమునకు సంబంధించిన కృత్యాలను పిల్లలచే నిర్వహింపజేసి ఆ తరువాత "జ్యా" మరియు "వ్యాసము", "వ్యాసార్ధము" ల మధ్య సంబంధమును గురించి పిల్లలు అవగాహన పరుచుకునేలా అభ్యసనను కొనసాగించేలా ప్రోత్సహించాలి.

వృత్తం యొక్క భాగాలు

వృత్తం యొక్క భాగాల గురించి పిల్లలు అవగాహనపరచుకొనేలా కాగితపు మడతల ద్వారా (Paper folding) చాపము, అల్ప సెక్టార్, అల్ప వృత్తఖండం, అధిక సెక్టార్, అధిక వృత్తఖండము మరియు అర్ధవృత్తఖండములను పరిచయం చేయాలి.

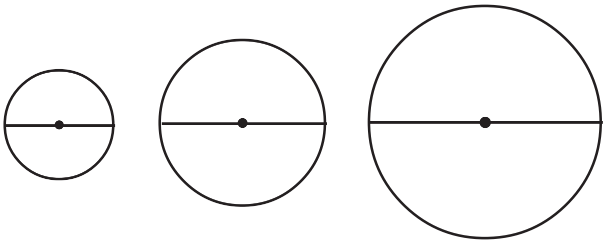
వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత

వివిధ రకాల పరిమాణాలలో గల వృత్తాకారపు వస్తువులను పిల్లలచే గమనింపచేస్తూ వాటి మధ్యగల పోలికలను మరియు బేధాలను గురించి చర్చింపజేయండి.

పిల్లలు ఏమేమి చర్చించి ఉంటారు?

వృత్తము, వ్యాసముల యొక్క పొడవులు. వీటి గురించి ఖచ్చితంగా మాట్లాడి ఉంటారు కదా?

వృత్తంలో వ్యాసం పొడవు పెరుగుతున్న కొద్దీ వృత్తం యొక్క పరిమాణము పెరుగుతున్నదని చెప్పగలరుకదా! మరియు ఆ వృత్త పరిధులను (వృత్తాల చుట్టుకొలతలు) వ్యాసాల పొడవుల ఆధారంగా పోల్చగలుగుతారు.



వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత అనే భావనను అవగాహన చేసుకొనే క్రమములో పిల్లలకు వివిధ రకాల వృత్తాకార వస్తువులను (రింగ్‌బాల్, గాజు, సైకిల్ చక్రం మొదలైనవి) ఇచ్చి వాటిని భూమిపై ఉంచి (గుర్తించిన స్థానము నుండి) ఒక పూర్తి చుట్టు త్రిప్పినపుడు అది ఎంత దూరం ప్రయాణించిందో నమోదు చేయమనండి. తిరిగి అదే వస్తువుల యొక్క అంచువెంబడి దారమును ఒక పూర్తి చుట్టు చుట్టిదాని పొడవును స్కేలు సహాయంతో కనుగొని నమోదు చేయమనండి.

ఒక వస్తువు అంచు వెంబడి చుట్టబడిన దారం పొడవు మరియు నిర్ధేశించిన బిందువు నుండి ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినపుడు అది ప్రయాణించిన దూరమునకు ఏమైనా సంబంధం ఉందా? పిల్లలతో చర్చింపచేయండి.

వృత్తము యొక్క చుట్టకొలత భావనను అవగాహన పరచుకొనేలా 7వ తరగతిలోని పేజి నెం. 257 నుండి ఇవ్వబడిన కృత్యాలను నిర్వహింపచేయండి.

వృత్తపరిధి – వ్యాసము మధ్య సంబంధము

వివిధ రకాల వృత్తాలను వృత్తలేఖిని సహాయంతో పిల్లలచేత నిర్మింపచేయండి. వాటి వ్యాసాలను గీయమనండి.

ఒక్కొక్క వృత్తము పరిధిని దారము సహాయంతో కొలుస్తూ, ఆ దారం పొడవును పట్టికలో నమోదు చేయించండి. తరువాత సంబంధిత వృత్తాల వ్యాసముల పొడవులను స్కేలు సహాయంతో కొలిచి పట్టికలో నమోదు చేయించండి.

ఇపుడు పట్టిక ద్వారా ఒక్కొక్క వృత్తపరిధి, దాని వ్యాసముల నిష్పత్తులను కనుగొనమనండి. ఫలిత విలువల మధ్య సంబంధమును చర్చింపచేయండి. ఆ విలువలు స్థిరముగా ఉంటాయి కదా! $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ $(\pi \simeq 3.14)$

$$\frac{\text{వృత్తపరిధి}}{\text{వ్యాసము}} = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{వృత్తపరిధి} = \pi \times \text{వ్యాసము} = \pi d$$

$$= \pi \times 2 \times \text{వ్యాసార్థము}$$

$$= 2\pi r$$

కొన్ని సందర్భాలలో వృత్తాకారపు డైనింగ్ టేబుల్ లేదా వృత్తాకారపు వస్తువులు తయారు చేసే సందర్భంలో వాటి వైశాల్యాలను కూడా పరిగణలోకి తీసుకోవలసి వస్తుంది.

వృత్త వైశాల్యము

8వ తరగతిలోని "సమతల పటముల వైశాల్యములు' అనే అధ్యాయంలోని వృత్తవైశాల్యమునకు సంబంధించిన కృత్యాలను పిల్లలచే నిర్వహింపచేయండి.

గ్రాఫ్‌పేపర్‌పై గీచిన వృత్తం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనమనండి. ఏవిధముగా కనుగొన్నారో చర్చింపచేయండి.

వృత్తము ఆక్రమించిన (వృత్తములోని గడులను లెక్కించడం ద్వారా) ప్రదేశమును ఖచ్చితమయిన విలువను పొందగలిగారా?

మరి ఖచ్చిత విలువను పొందడానికి ఏఏ పద్ధతులను అనుసరించాలి? వృత్తకార కాగితమును వీలైనన్ని సమాన భాగాలుగా కత్తిరించి వాటిని ప్రక్క ప్రక్కన అమర్చినచో ఏ ఆకారము ఏర్పడుతుందో గమనింపచేయండి. ఇంకా అలాగే మరింత ఎక్కువ సమాన భాగాలు అమర్చగా ఏర్పడే ఆకారాన్ని ఊహించమనండి.

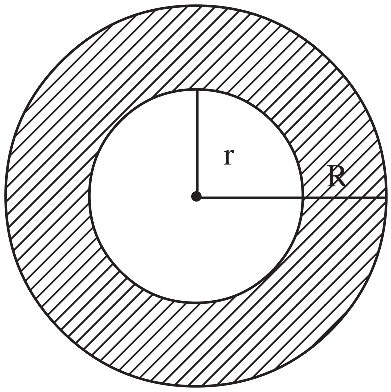
దీనికై 8వ తరగతిలోని వృత్తవైశాల్యానికి సంబంధించిన వివిధ కృత్యాలను పిల్లలచే నిర్వహింపజేసి వృత్త వైశాల్యాన్ని కనుగొనే విధానాన్ని అవగాహనపరచుకునేలా ప్రోత్సహించాలి.

కంకణాకార స్థల వైశాల్యం / బాట వైశాల్యం

చేతికి వేసుకునే గాజులు, రింగ్‌బాల్ మరియు వృత్తాకార పార్కులు గాలి నింపబడిన సైకిల్ ట్యూబ్ వీటి సమతల పటాలు ఏక కేంద్ర వృత్తాలుగా ఉండటం గమనించారా?

కంకణాకార స్థల వైశాల్యాలు / బాట వైశాల్యాలు ఎలా కనుగొంటారు?

ఈ విధమైన సందర్భాలలో బాహ్య వృత్త వైశాల్యం మరియు అంతర వృత్త వైశాల్యాల బేధమునకు, కంకణాకార స్థల వైశాల్యం / బాట వైశాల్యం మధ్య సంబంధము ఏదైనా ఉందా?



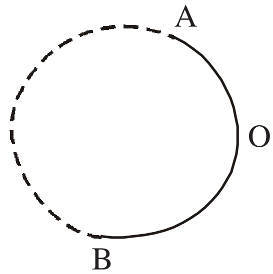
దీనికై 8వ తరగతి గణిత పుస్తకంలో ఇవ్వబడిన కృత్యాలను పిల్లలచే నిర్వహింపచేసి అవగాహన పరచుకునేలా ప్రోత్సహించాలి.

చాపము

పై పటములో $\widehat{AOB}$ దేనిని సూచిస్తుంది?

$\widehat{AOB}$ పొడవును ఎలా కనుగొంటారు?

వృత్త చాపము పొడవునకు మరియు అది కేంద్రం వద్ద చేయు కోణమునకు మధ్య సంబంధం ఏమిటి?



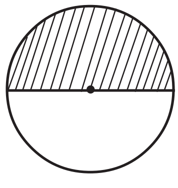
పై అంశాలను గూర్చి పిల్లలతో చర్చింపజేస్తూ పాఠ్యపుస్తకంలో ఇచ్చిన చాపము పొడవు కనుగొను కృత్యమును పిల్లలచే నిర్వహింపజేస్తూ వారు అవగాహన పరచుకొనేలా ప్రోత్సహించాలి.

సెక్టారు వైశాల్యం

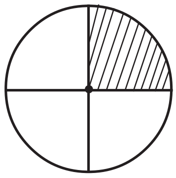
అర్ధవృత్తఖండం సెక్టార్ అవుతుందా?

అర్ధవృత్త వైశాల్యం, అర్ధ సెక్టారు వైశాల్యమునకు సమానమా?

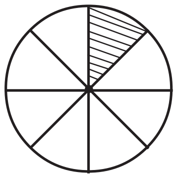
ఈ క్రింది క్రమాన్ని గమనించండి.



$$\frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2 \times \frac{180^0}{360^0}$$



$$\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2 \times \frac{90^0}{360^0}$$



$$\frac{\pi r^2}{8} = \pi r^2 \times \frac{45^0}{360^0}$$

. . . .

. . . .

. . . .

ఏమి గమనించారు?

పై క్రమాన్ని అనుసరించి కొనసాగించగలరా?

దీన్ని సాధారణీకరణం చేయగలిగే విధముగా పిల్లలచే చర్చింపచేయండి.

పై అంశాలను చర్చించపజేసినచో వృత్తంలోని ఒక భాగము యొక్క వైశాల్యం (సెక్టార్ వైశాల్యం)

$$= \pi r^2 \times \frac{\text{సెక్టార్ కోణం}}{360^0}$$

$$= \pi r^2 \times \frac{x^0}{360^0}$$

గా సాధారణీకరణం చేస్తూ సూత్రీకరణ చేయగలగుతారు.

సెక్టారు వైశాల్యం మరియు చాపం పొడవుల మధ్య సంబంధం ఏమిటి?

సెక్టారు వైశాల్యం పెరిగినచో దాని చాపం పొడవు ఏమవుతుంది?

సెక్టారు వైశాల్యం, వృత్త వ్యాసార్థం ఇచ్చినచో చాపం పొడవు ఎలా కొనుగొంటారు?

పై అంశాల పట్ల పిల్లలచే ఆలోచింపజేయండి – చర్చింపచేయండి.

ఈ విధంగా భావన అవగాహనకై పిల్లలచే చర్చింపజేస్తూ, కృత్యాలు నిర్వహింపజేస్తూ వారి అభ్యసనను ప్రోత్సహించాలి.

సై భావనలను స్థాయివారీగా (తరగతి వారీగా) పిల్లలలో పెంపొందింపజేస్తూ వాటిని నిజజీవితంలో అవసరమైన సందర్భాలలో ఉపయోగించుకొనే విధముగా ప్రోత్సహించారు. సమస్యల సాధనకు పిల్లలు సోపాన క్రమమున ననుసరించి సాధించేవిధంగా అభ్యాసం, ఇవి చేయండి, ప్రయత్నించండి, ఆలోచించండి – చర్చించండి. శీర్షికలలోని సమస్యలను సాధనను వారిచే చర్చింపజేసి సాధించేలా ప్రోత్సహించాలి.

ఇంకా పాఠ్యపుస్తకంలోనివే కాకుండా అదనపు సమస్యలు (వివిధ రకాలుగా రూపొందించినవి) పిల్లలకు ఇచ్చి వాటి సాధనలను చర్చింపజేసి సాధించేలా ప్రోత్షహించాలి.

ఘనాకార వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యాలు - ఘనపరిమాణాలు

ఉపోద్ఘాతం

మనం నిత్యజీవితంలో పలురకాల ఘనాకార వస్తువులను వివిధ సందర్భాలలో వినియోగిస్తాం.

ఇందులో క్రమమైన అకృతికల్గిన దీర్ఘఘనం, సమఘనం, స్థూపం, గోళం, శంఖువు మొదలగువానిని మనకు ఎక్కువగా వాడుతాం.

6, 7 తరగతులలో విద్యార్థులకు తెలిసిన / వారు నిత్యం చూసే వస్తువులలో దీర్ఘఘనం, సమఘనం, స్థూపం, గోళం, శంఖువు వంటి వస్తువులను ఏమేమి గమనిస్తారో కూడా చర్చించడం జరిగినది.

ఇట్టి ఘనాకార వస్తువుల వైశాల్యాలు, ఘనపరిమాణాలు కనుగొనాల్సిన అవసరం నిత్యజీవితంలో నిత్యం ఎదురయ్యే సందర్భాలు అనేకం ఉంటాయి. కావున ఇట్టి ఘనాకార వస్తువుల నిర్మాణాన్ని (అందలి తలములు, అంచులు, మూలలు గుర్తింప జేయుటకు) అవగాహన చేయుటకు 7వ తరగతిలో త్రిమితీయ ఆకారాల వలరూపాలను పరిచయం చేయడమైనది.

మనకు '3D' వస్తువులను / ఆకారాలను - సమతలంపై ప్రాతినిధ్యం చేయుటకు 'Dot paper' (చుక్కల కాగితం)పై ఘనాకారాలను గీయడం వంటి కృత్యాలను కల్పించనైనది. ఇచ్చట వల రూపాలు బాగా అర్థమయితే, అట్టి ఘనాకార వస్తువులను సమతలంపై గీయడం సులభం అవుతుంది. Dot paper పై ఒక ఘనాకార వస్తువు కోణాలలో ప్రాతినిధ్యపరిచే సందర్భాలు కల్పించాలి.

ఒక యూనిట్ సమఘనం సహాయంతో ఊహచిత్రాలను ఏర్పరచడం వంటి కృత్యాలు ద్వారా వివిధ ఆకారాలను ఇవ్వనైనది. 3D వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపితే కృత్యాలను కల్పిస్తూ, అట్టి 3D వస్తువులలో

పట్టకాలు, పిరమిడ్ ఆకారాలపై అవగాహన కల్పించనైనది. ఇచ్చట అంచులు, మూలలు, ముఖాలు గుర్తింపజేసి వాని మధ్యగల సంబంధాన్ని తార్కికంగా చర్చింపజేస్తే ఆయిలర్ సూత్రం $F + V = E + 2$ ను పరీక్షించే కృత్యాలను పరిచయం చేయడం పిల్లలకు ప్రత్యక్ష అనుభవాలను కల్పించాల్సిన ఆవశ్యకత ఎంతైనా కలదు.

8, 9 తరగతులలో ముఖ్యంగా

1. దీర్ఘఘనం, ఘనం, స్థూపం, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళం వంటి ఘనాకార సంపూర్ణతల వైశాల్యం, ప్రక్కతల వైశాల్యం, మరియు ఘనపరిమాణం, భావనల అవగాహన మరియు వలరూపాలు, తలాల గుర్తించడం, తద్వారా ఉపరితల వైశాల్యమునకు సూత్రాల్ని ఉత్పాదించడం, మరియు కొన్ని ప్రయోగాత్మక కృత్యాల ద్వారా వివరించడం జరిగినది, ఇలాంటి కృత్యాలను "గణిత ప్రయోగశాల కృత్యాలుగా" (Maths lab activity) పిల్లలచే చేయించి, వారికి ప్రత్యక్ష అనుభవాలను (perceptural experiences) కల్పించినపుడు, ఇట్టి భావనల స్థిరీకరణ జరుగుతుంది. కావున ఇచ్చట ఉపాధ్యాయులు ఒక facilitator గా కావలసిన సామాగ్రిని ముందస్తు సేకరించుకొని, ప్రణాళికాబద్ధంగా పిల్లలచే భావనలపై చక్కని అవగాహన కల్పించాల్సిన ఆవశ్యకత కలదు. ఎప్పుడైతే పిల్లలు ఆగమనాత్మకంగా "సూత్రాన్ని రాబట్టుతారో" – అపుడే అలాంటి భావనలపై ఇచ్చిన సమస్యలను సాధించడంలో పిల్లలు ముందుండే అవకాశం ఎంతైనా కలదు.

   – ఇచ్చట వివిధఘనాకారాలు (i) క్రమాకార పట్టకాలు (ii) పిరమిడ్ ఆకారాలు గల వస్తువులు ఉపరితల వైశాల్యాలు, ఘనపరిమాణాలను కనుగొనుటకు ప్రయోగాత్మకంగా ఆగమనాత్మకంగా రకరకాల కృత్యాలను ఇవ్వనైనది.

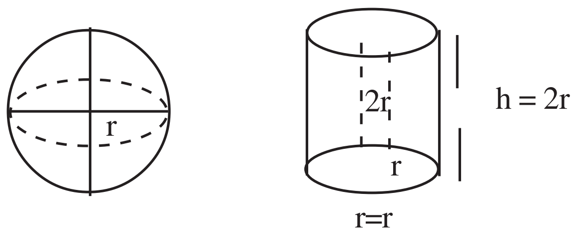
     అదేవిధంగా ఒక ఘనాకారం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనుటకు మరొక ఘనాకారంతో పోల్చడం, వాని మధ్య సంబంధాలను గుర్తించడం వంటి కృత్యాల ద్వారా అనుసంధానం చేసిన కృత్యాలపై ఎక్కువగా అవగాహన కల్పించాలి.

   – 8, 9 తరగతులలో "ఘనపరిమాణ:" 'సామర్థ్యం' అనే రెండు భావనల అవగాహనకు మరిన్ని కృత్యాలను పిల్లలచే చేయించి, వాటిని వినియోగించే సందర్భాలను పిల్లలకు తెలియజేయాలి.

   – 10వ తరగతిలో వివిధ క్రమాకార (వస్తువుల) త్రిమితీయ ఆకారాల ప్రక్కతల వైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాల భావనలకై పునర్విమర్శలో భాగంగా, వివిధ సందర్భాలలో శంఖువు,

స్థూపం, గోళంల ఘనపరిమాణం, సంపూర్ణతల వైశాల్యాల పోలిక, వాటి నిష్పత్తులు కనుగొడం వాని మధ్యగల సంబంధం, వీటిపై ఎక్కువగా దృష్టికేంద్రీకరించాయి.

ఉదా: ఒక గోళం యొక్క వ్యాసార్ధం 'r' యూనిట్లు, ఇట్టే గోళం యొక్క వ్యాసార్ధాన్ని సమాన భూవ్యాసార్ధం కల్గి, వారు 2r తో వాని సంబంధం ?



సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $4\pi r^2$ $\quad 2\pi r \times 2r$

$= 2\pi r \times 2r$

$= 4\pi r^2$

గో.సం.తవె: స్థూపం తవె = $4\pi r^2 : 4\pi r^2$

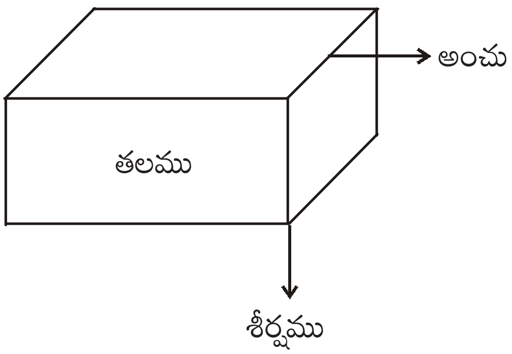
$= 1 : 1$

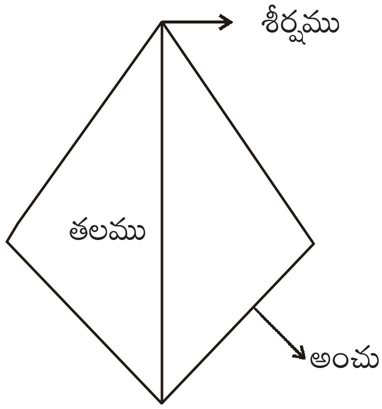
- క్షేత్రమితి బోధనలో తార్కికత, దృశ్యీకరణ చాలా అవసరము. దాని కొరకు క్రింద ఉదహరించిన ప్రశ్నలను వేయుటవలన సరియైన జ్ఞానమును పొందడానికి ఏఏ సందర్భములలో ఉపరితల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఘన పరిమాణాలనుపయోగిస్తారో తెలియచేయుము?
- స్థూపాకార పాత్రలో ఒక గోళము అంతర్లీనపరచ బడినది. అయినచో గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యమునకు సమానమవుతుందా? అయితే ఏవిధముగా సాధ్యమో సహేతుకముగా వివరింపుము?

10వ తరగతిలో ఘనాకార వస్తువుల సముదాయ ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములు కనుగొనే భావనలపై విద్యార్థులకు అవగాహన కల్పించుటకు నిత్యజీవితంలో మనం ఉపయోగించే చెక్క వస్తువులు, గృహోపకరణములు, సీసాలు, ఆయిల్ టాంకర్లు, అదేవిధంగా వివిధ నిర్మాణాలలో (భవన నిర్మాణంలో, బ్రిడ్జిల నిర్మాణం మొదలగు వానిలో) సమ్మిళితం అయి ఉండే ఆకారాల సముదాయాలకు సంబంధించిన సమస్యల సాధనలో ముందుగా ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి అనువైన ఘనాకార చిత్రమును గీచి, అందులో విడిభాగాలను వాటి కొలతలను గుర్తింప జేయడం అనేది కీలకమైనది.

మన పాఠ్యపుస్తకాలలో అర్ధగోళము + శంఖువు, సమఘనం + అర్ధగోళం, అర్ధగోళం + స్థూపం + శంకువు. మొదలైనవాని కలయికతో ఏర్పడిన ఆకారాల ఉపరితల వైశాల్యలు, ఘనపరిమాణాలను గణించే పదార్థాలు ఉన్నాయి. కాని సమఘనము + చతుర్ముఖీయ పిరమిడ్, దీర్ఘఘనము + పట్టకము కలిసి ఘనాకార సముదాయ పదార్థాలను కూడా తీసుకొని అవగాహన కల్పించాలి.

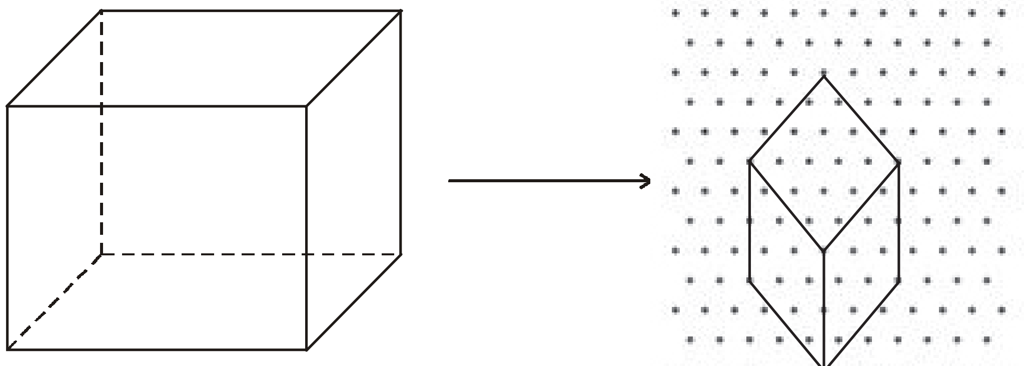
త్రిపరిమాణ వస్తువుల యొక్క తలములు, అంచులు శీర్షములపై అవగాహన కల్గించాలి.





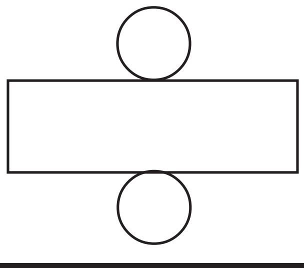
తలముల సంఖ్య (F), శీర్షముల సంఖ్య (V), అంచుల సంఖ్య (E) ల మధ్య గల సంబంధము $F + V = E + 2$ ను వివిధ త్రిమితీయ పటములను పరిశీలించుట ద్వారా సరిచూడమనాలి.

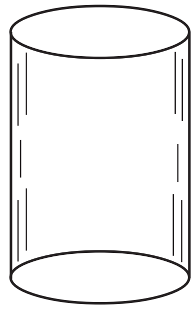
Isometric పేపరు ద్వారా త్రిమితీయ పటములను ద్విమితీయముగా చూపుటను విశదీకరించాలి.

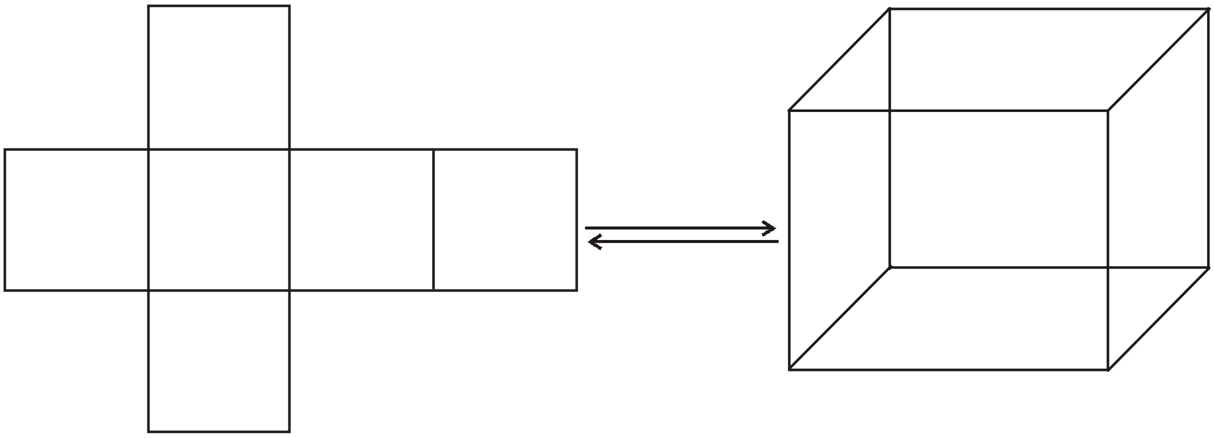

దీర్ఘఘనము

మరికొన్ని త్రిమితీయ పటాలను Isometric పేపరు విద్యార్థులచే గీయించి వారి యొక్క పరిశీలనలును తెలపమనాలి.

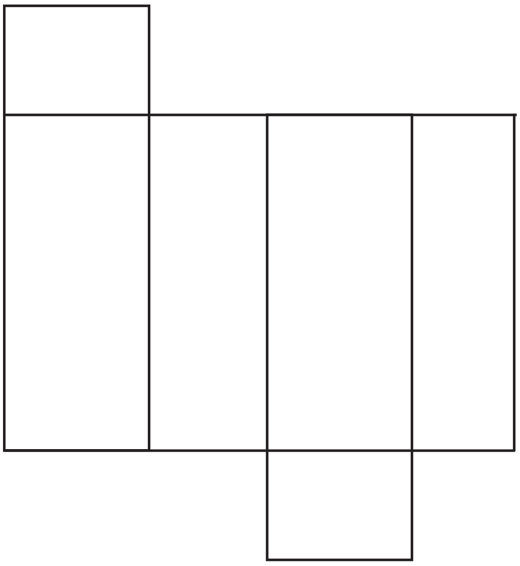
వలరూపాలు ఏర్పడు 3-D వస్తువుల, ఆకారాలను విద్యార్థులచే గుర్తింపచేసి వాటి రూపాంతరమును విద్యార్థులకు అవగాహన కల్పించాలి.

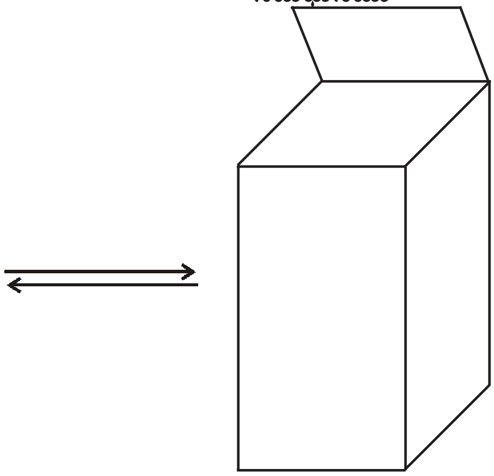



స్థూపము

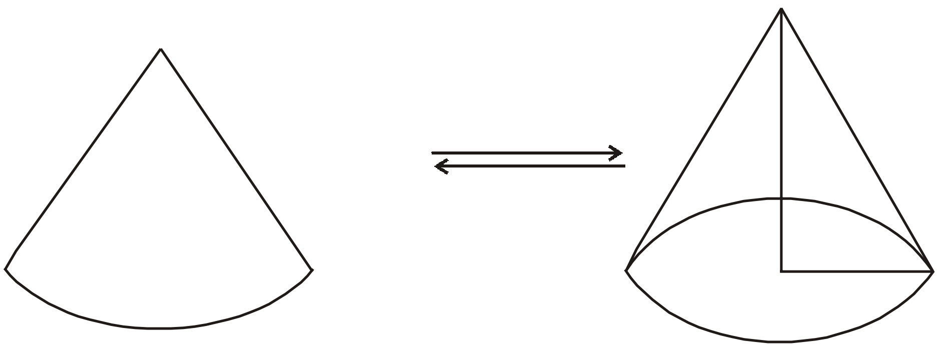


సమఘనము

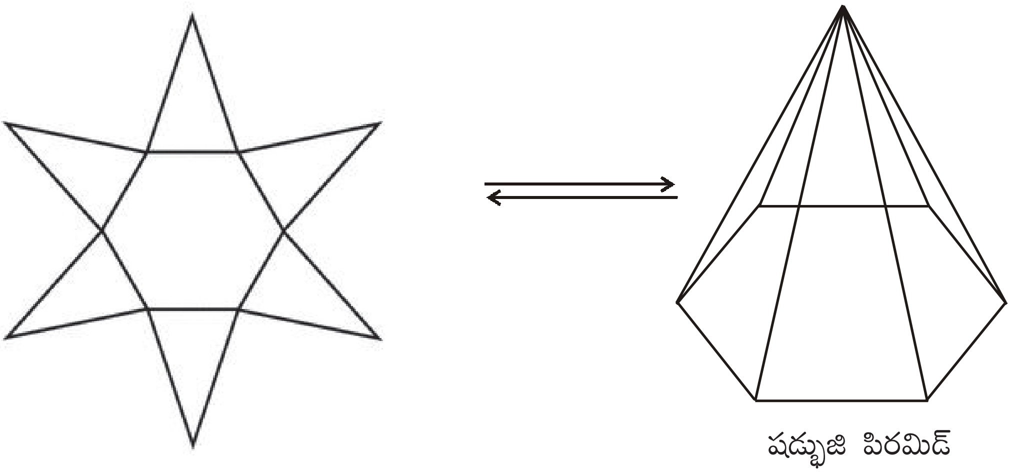




దీర్ఘఘనము

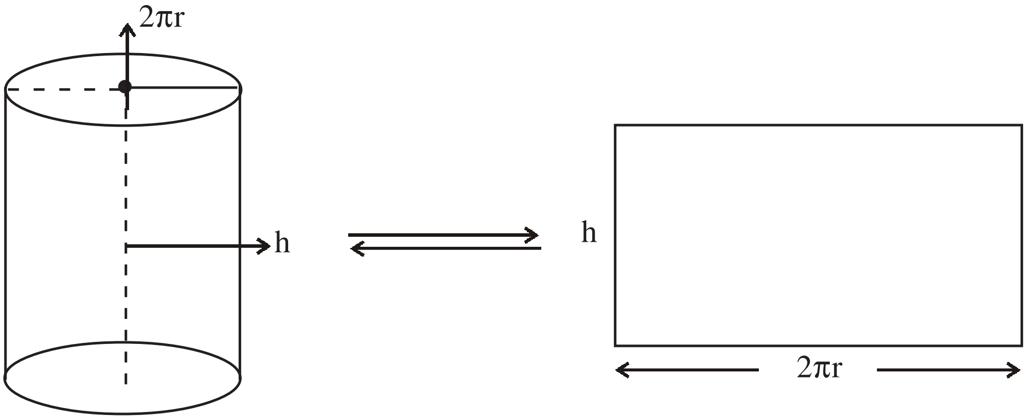


శంఖువు

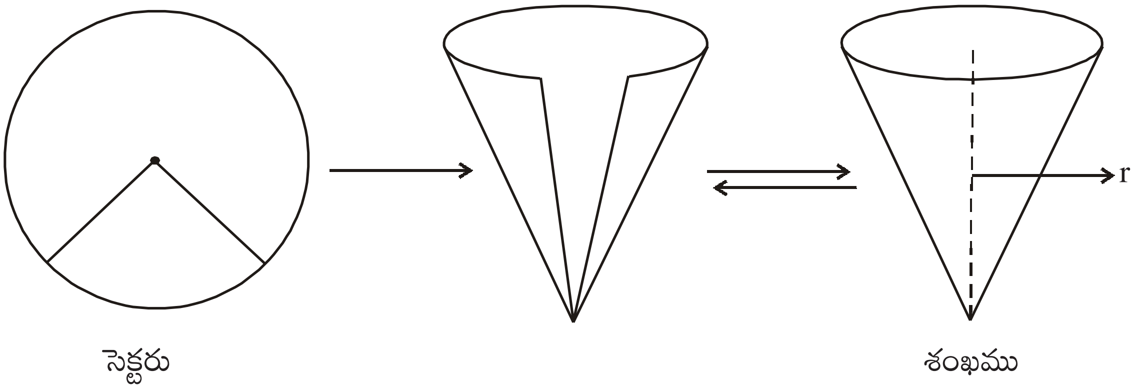


షడ్భుజి పిరమిడ్

వివిధ ద్విమితీయ రూపాలు, త్రిమితీయ రూపాలుగా మారే క్రమములో వాటి కొలతలు ఏవిధముగా మార్పు చెందుతాయో అవగాహన కల్పించాలి.



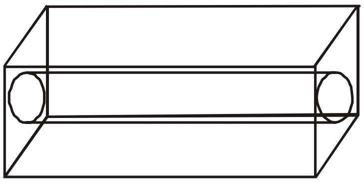
దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు స్థూపము యొక్క భూపరిధి గాను, వెడల్పు, ఎత్తుగాను పరివర్తనము చెందుతుంది.



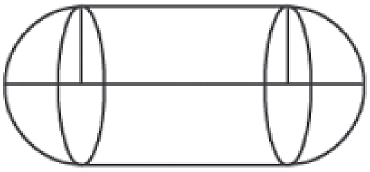
సెక్టరు శంఖము

సెక్టరు యొక్క చాపము పొడవు శంఖువు యొక్క భూపరిధి గాను, వ్యాసార్థము ఎత్తుగాను మార్పు చెందుతుంది. ఈ విధముగా మిగిలిన, మనకు తెలిసిన వివిధ ద్విమితీయ రూపాలు, త్రిమితీయ రూపాలుగా మార్పు చెందినప్పుడు వాటి కొలతలు ఏవిధముగా రూపాంతరము చెందుతాయో విద్యార్థులకు తెలియజేయాలి. ఆ కృత్యములను ప్రదర్శింపచేయాలి.

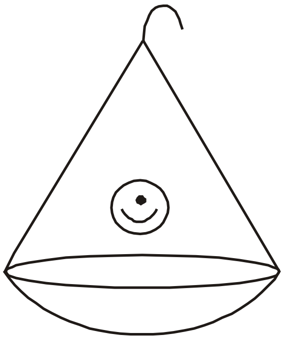
వివిధ త్రిమితీయ జ్యామితీయ రూపాలు కలయికతో మరికొన్ని త్రిమితీయ రూపాలు ఏర్పడుతాయి. ఒక త్రిమితీయ వస్తువులలో యున్న త్రిమితీయ రూపాలను గుర్తింపచేయాలి. తద్వారా వాటి యొక్క ఉపరితలవైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములను గుర్తించుట, విద్యార్థులకు సులభతరమవుతుంది.



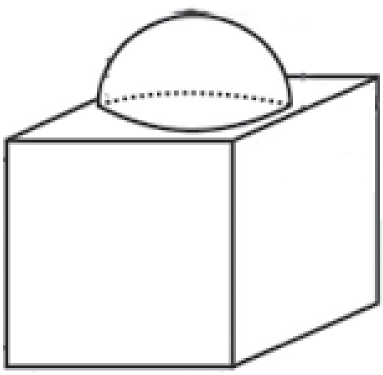
→ స్థూపము + దీర్ఘఘనము



→ స్థూపము + అర్ధగోళము



→ శంఖువు + అర్ధగోళము



→ దీర్ఘఘనము + అర్ధగోళము

10వ తరగతిలో "ఒక రూపంలో గల ఘనపదార్తాలు మరొక రూపంలోకి మారుట" (దీ.ప.లో ఎలాంటి మార్పులేని సందర్భంలో) అనే భావనల క్రింద క్రిద చూపిన రకరకాల సందర్భాలను చర్చించడం జరిగినది.

(i) దీర్ఘఘన రూపం నుండి
- స్థూపముగా
- గోళముగా
- శంఖువులు
- స్థూపములు

(ii) సమఘనాకారం నుండి
- స్థూపము
- గోళం
- శంఖువు
- స్థూపము

పై విధంగా గోళము, శంఖువు, స్థూపం నుండి ఇతర రూపంలోకి మారే సందర్భాలను తీసుకొన్నాము. అదేవిధంగా రెండు లేదు అంతకంటే ఎక్కువ సంఖ్యగల ఒకే రూపం గల ఘనపదార్ధాలు మరొక ఘనపదార్ధంగా అదేరంగం లేదా మరొక రంగం లోకి

ఉదా(i) 'r' వ్యాసార్ధం గల్గిన "లోహపు గోళనములను కరిగించి, ఒక సిద్ధ గోళముగా మారినపుడు, దాని ఘనపరిమాణాలను గణించడం, తద్వారా ఏర్పడిన నూతన గోళం యొక్క వ్యాసార్ధం కనుగొనడం".

(ii) 'r' వ్యాసార్ధం గల్గిన 'x' లోహపు గోళములను కరిగించి, r_1 వ్యాసార్ధం, క్రమవృత్తాకార స్థూపంగా మార్చిన దాని ఎత్తు ఎంత?

- ఇలాంటి సమస్యల సాధనలో ఘనపదార్ధం ఒక రూపం నుండి మరొక రూపంలోకి మారినపుడు, ఘనపరిమాణం సమానం అనే సందర్భాన్ని తీసుకోని వివిధ సందర్భాలతో కూడిన సమస్యలపై విస్తృత అవగాహన కల్పించాలి.

కొన్ని వస్తువులు రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ ఘనాకృతుల కలయిక వలన ఏర్పడినట్లు మనము గుర్తించవచ్చును. ఇటువంటి ఘనాకార వస్తు సముదాయమైన వాటికి ప్రక్కతల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణాలను ఎలా కనుగొనాలి ?

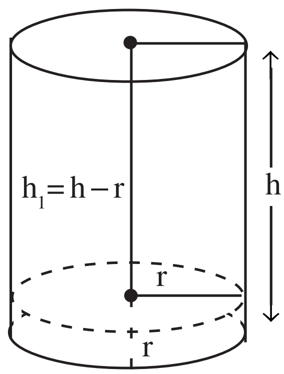
- గోళము ఘనపరిమాణము, గోళం ఉపరితలవైశ్యాలమునకు సమానము. (సంఖ్యాపరముగా) అయినచో గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము ఎంత?

ఇటువంటి ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణం కనుగొనడానికి జరగాల్సిన ప్రక్రియ ఏమిటి?

1. ఆ ఘనాకృతిని దృశ్యీకరించుకోవాలి.
2. దానిని పటరూపంలో గీయాలి.
3. గీసిన పటంలో కొలతలను రాయాలి.
4. ఆ పటంలోని ఆకృతుల మధ్యగల గణిత సంబంధాలను గుర్తించాలి.
5. సరియైన సూత్రాలను రాయాలి.
6. ఆ సూత్రాలలో విలువలను ప్రతిక్షేపించి, సూక్ష్మీకరించడం ద్వారా మనకు కావలసిన దానిని కనుగొనాలి.
7. వచ్చిన విలువను సరిచూడాలి.

ఉదాహరణ : లోహపు పాత్ర స్థూపము మరియు అర్థగోళముల కలయిక అని మనము గమనించవచ్చును.

స్థూపము మరియు అర్ధగోళముల వ్యాసములు సమానము. పాత్ర ఎత్తు '' అయిన, అర్ధగోళము ఎత్తు '' మరియు స్థూపము ఎత్తు అగును.



పాత్ర బయటి ఉపరితల వైశాల్యం = స్థూపం ప్రక్కతల వైశాల్యం + అర్ధగోళం వక్రతల వైశాల్యం అగును.

అదేవిధంగా పాత్ర ఘనపరిమాణం = స్థూపం ఘనపరిమాణం + అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం అగును.

h, h_1, r కొలతలలో ఏ రెండు కొలతలు తెలిసిన మూడవ కొలతను కనుగొనవచ్చును.

అర్ధగోళము ఎత్తు, దాని వ్యాసార్ధముల మధ్యగల సంబంధము ఏమిటి? మీ వివరణను తెలపండి.

దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్యపరచడము అనే విద్యాప్రమాణము ద్వారా క్షేత్రమితి అంశాలను విద్యార్థులకు అవగాహన కల్పించేందుకు ఈ క్రింది కృత్యములు చాలా ఉపయుక్తముగా ఉంటాయి.

కృత్యము : ఒక స్థిర అక్షముపై బిగించబడిన జ్యామితీయ వస్తువు భ్రమణము వలన ఏర్పడే త్రిమితీయ వస్తువులను గుర్తించుము.

ఉపయోగించే విధానము : బోధనోపకరణములో ఒక మోటారు మరియు వివిధ జ్యామితీయ ఆకృతులు

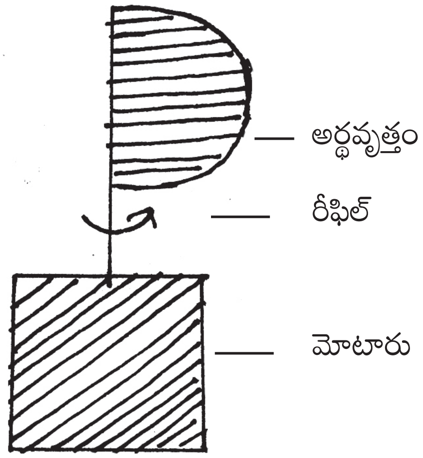
(a) వృత్తకార

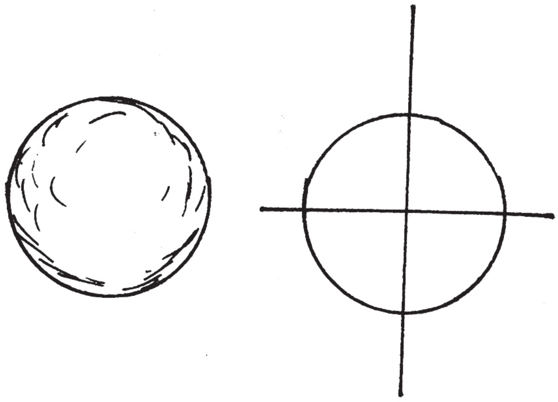
(b) పరావలయ

(c) త్రిభుజాకార లేదా కోణాకార

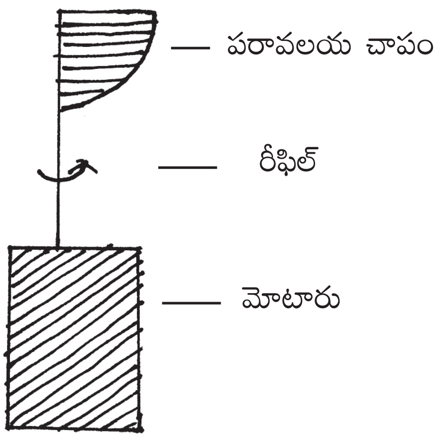
(d) చతురస్రాకార లేదా దీర్ఘచతురస్రాకార

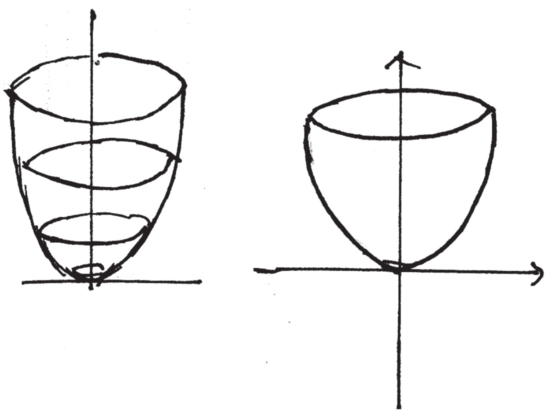
(a) వృత్తకార ఏర్పడిన ఘనపు ఆకృతి

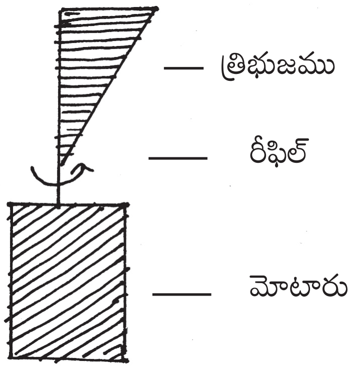


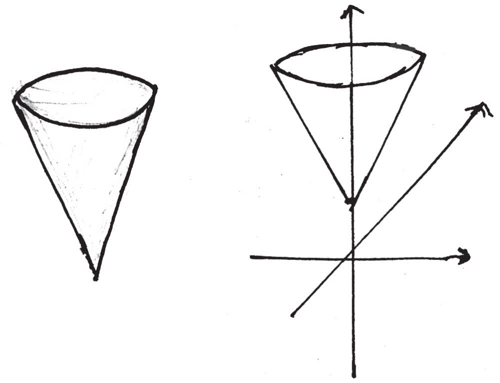


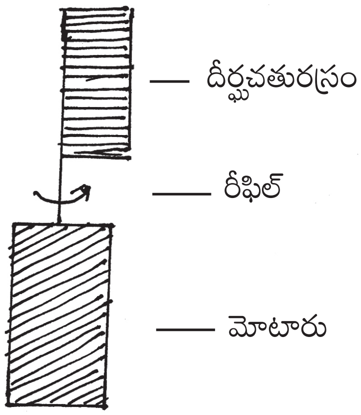
(b) పరావలయ

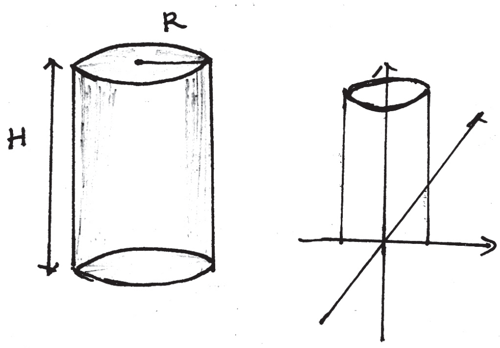








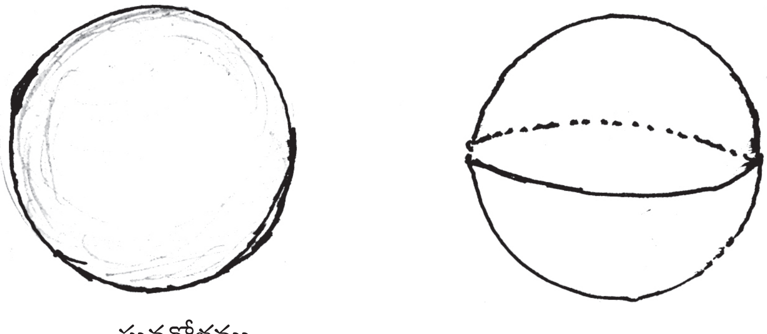




విద్యార్థులకు మరికొన్ని ఆకృతులనిచ్చి మోటారునకు బిగించి ఏర్పడు త్రిమితీయ ఆకృతులను గమనించి గుర్తించవలసినదిగా సూచించాలి.

కృత్యము - 1

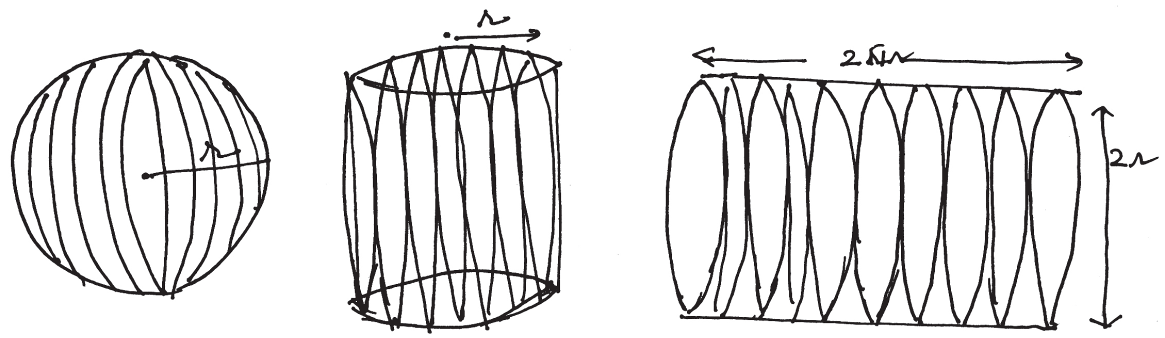
గోళము, దాని నుండి ఏర్పడే సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణముల మధ్య సంబంధమును రాబట్టుట వ్యాసార్థము గల ఒక ఘన గోళమును ఈ క్రింది చూపిన విధముగా 8 భాగములు చేయాలి.



ఘనగోళము

కృత్యము -2 :

గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము



r వ్యాసార్థముగా గల గోళము	స్థూపము భూవ్యాసార్థం = r భూపరిధి = $2\pi r$	దీర్ఘ చతురస్ర కొలతలు = $2\pi r$ వెడల్పు = $2r$
పటము (i)	పటము (ii)	పటము (iii)

సోపానములు :

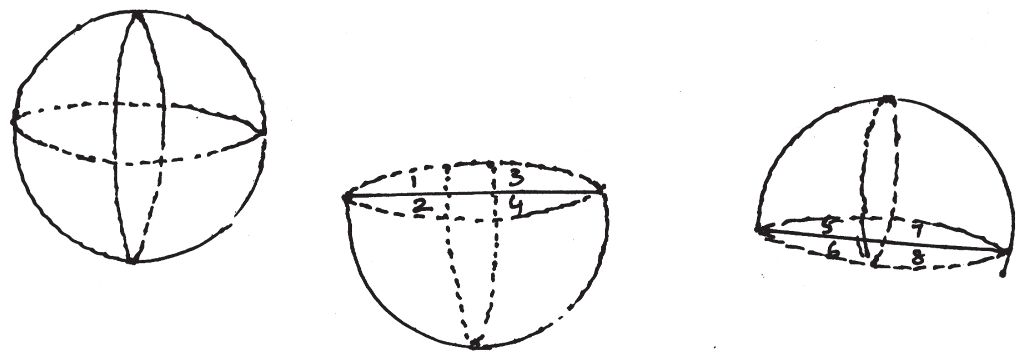
1. గోళము యొక్క ధృవముల వెంబడి పటములో చూపిన విధముగా గోళమును ఖండించి ఎత్తు $2r$, భూపరిధి $2\pi r$ కలిగిన స్థూపముగా మలచాలి.
2. స్థూపమును క్షితిజ లంబముగా పటములో చూపిన విధముగా కత్తిరించి $2\pi r$ యూనిట్ల పొడవు, $2r$ యూనిట్లు వెడల్పుగా కలిగిన దీర్ఘచతురస్రముగా తయారు చేయాలి.

దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వైశాల్యము = $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

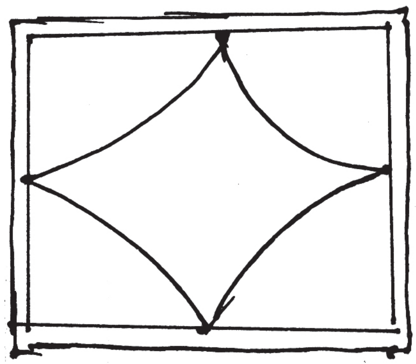
$\therefore$ గోళము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యము = $4\pi r^2$

ఫలితము : గోళము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యము = $4\pi r^2$

విద్యార్థులచే గోళము యొక్క ఘనపరిమాణమును ఏవిధముగా కనుగొంటారో కృత్యముగా ఇయ్యాలి.



8 భాగములను తలక్రిందులు చేసి క్రింది చూపిన విధముగా ఒక సమఘనము ఏర్పడే విధముగా అమర్చాలి. గోళము యొక్క బయట ఉపరితలములు సమతలముగా ఉండే విధముగా చూసుకోవాలి. కాని ఈ గోళము భాగముల మధ్య ఖాళీ ప్రదేశము ఉంటుంది.



గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము = $\frac{4}{3}\pi r^3$

ఏర్పడిన సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము = $(2R)^3$

$= 8R^3$

అంతరముగా ఏర్పడిన ఖాళీ స్థలము యొక్క ఘనపరిమాణము

$= 8R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

సమఘనములో ఏర్పడిన ఖాళీ స్థలము యొక్క శాతము $= \dfrac{8R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times 100$

$= \left[\dfrac{6-\pi}{\pi}\right] \times 100$

* పై విలువ గోళము యొక్క వ్యాసార్ధపు విలువపై ఆధారపడదు.

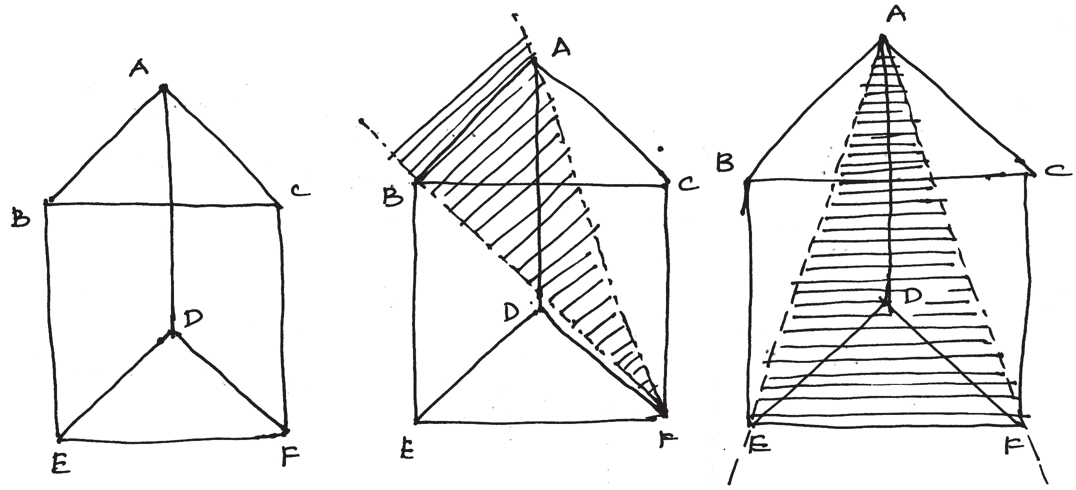
కృత్యము – 3 : పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణము

సమబాహు త్రిభుజము భూమిగా గల క్రమ పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణము, సమాన భూమి, ఎత్తు కలిగిన పట్టకము యొక్క ఘనపరిమాణములో మూడవ వంతు ఉంటుంది అని చూపు కృత్యము.

విధానము : సమబాహు త్రిభుజము భూమి, h ఎత్తుగా కల్గిన ఒక పట్టకమును తీసుకోవాలి. పట్టకము యొక్క భూమితో సమానము, ఎత్తు కూడా సమానముగా కల్గిన రెండు పిరమిడ్‌లను మరియు మొదటి పిరమిడ్ యొక్క ఒక ముఖముతో సమానము అయిన భూమి, రెండవ పిరమిడ్ యొక్క ఎత్తుతో సమానము అయిన కొలతలతో కూడిన పిరమిడ్‌ను తీసుకోవాలి.

- రెండు వస్తువుల కలయిక వలన ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము ఆ రెండింటి వస్తువుల ఘనపరిమాణముల మొత్తమునకు సమానం. కాని వాటి ఉపరితల వైశాల్యముల మొత్తం, ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమునకు సమానముకాదు. కారణమును సహేతుకముగా వివరింపుము?
- ఒక ఆకృతిలో యున్న వస్తువును, మరొక ఆకృతిలో గల వస్తువులుగా మార్చినప్పుడు ఘనపరిమాణములో తరుగుదల ఉంటుందా? చర్చించుము.

మూడు పిరమిడ్‌లను తయారు చేసే విధానము



పటము (i) పటము (ii) పటము (iii)

1. త్రిభుజము ΔDEF భూమిగా గల, పైభాగము (Top) కూడా త్రిభుజము ABC గా గల పట్టకమును తీసుకోవాలి.
2. పటము (ii) లో చూపిన విధముగా A, B, F ల మధ్య ఆవరించియున్న తలమును పరిగణించాలి.
3. పటము (iii) లో చూపిన విధముగా A, E, F ల మధ్య ఉన్న తలము కల్గిన పెద్ద ముక్కను కత్తిరించాలి.

   పై విధముగా చేయుట వలన మనము కోరిన విధముగా 3 పిరమిడ్‌లు ఏర్పడతాయి.

ఉపయోగించే విధానము

1. ఏర్పరిచిన మూడు పిరమిడ్‌లను కలుపుట వలన పట్టకము ఏర్పడుతుంది.
2. రెండు పిరమిడకల యొక్క ఉపరితలములు సమబాహు త్రిభుజము, భూములను కల్గి ఉంటాయి. ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములు కనుక ఘనపరిమాణములు కూడా సమానముగా ఉంటాయి.
3. మూడవ పిరమిడక యొక్క ఘనపరిమాణము, మిగిలిన రెండు పిరమిడకల యొక్క ఘనపరిమాణములో సమానముగా ఉంటుంది.

నిరూపణ : 3 పిరమిడ్‌ల యొక్క ఘనపరిమాణము మొత్తము పట్టకము యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సమానము.

పట్టకము యొక్క ఘనపరిమాణము = 3 × పిరమిడ్ ఘనపరిమాణము

లేదా

పిరమిడ్ ఘనపరిమాణము = $\frac{1}{3}$(పట్టక ఘనపరిమాణమ)

క్షేత్రమితి అదనపు సమాచారం

1. ఒక దీర్ఘఘనం యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులలో వరుసగా $x\%$, $y\%$ మరియు $z\%$ మార్పుచేసిన (పెరిగిన (+ve)/ తగ్గితే (−ve)) దాని ఘనపరిమాణంలో మార్పుశాతము ఎంత?

$$\left[x+y+z+\frac{xy+yx+zx}{100}+\frac{xyz}{(100)^2}\right]\%$$

(గమనిక : పెరుగుదలను ధనాత్మకంగా (+ve), తరుగుదలను ఋణాత్మకంగా (-ve) తీసుకోవాలి. అపుడు ఫలితం ధనాత్మకంగా వస్తే ఘ.ప.లో పెరుగుదలను, ఫలితం ఋణాత్మకంగా వస్తే ఘనపరిమాణం తగ్గుదలను సూచిస్తుంది).

2. ఒక సమఘనం యొక్క ఒక భుజాన్ని $x\%$ పెంచితే, దాని ఘనపరిమాణంలో పెరుగుదల శాతం ?

$$=\left[\left(1+\frac{x}{100}\right)^3-1\right]\times 100\%$$

సమస్య : ఒక ఘనం యొక్క భుజాన్ని 10% పెంచితే, దాని ఘనపరిమాణంలో పెరుగుదల ఎంత ?

3. ఒక క్రమవృత్తాకార స్థూపం యొక్క వ్యాసార్ధంలో ఎలాంటి మార్పు లేకుండా, దాని ఎత్తులో $x\%$ పెరిగితే, అట్టి స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణాలలో మార్పు = $x\%$

4. ఒక స్థూపం యొక్క ఎత్తులో మార్పు లేకుండా, దాని వ్యాసార్ధంతో $x\%$ పెరిగినట్లయితే, అపుడు స్థూప ఘనపరిమాణంలో మార్పు

$$=\left(2x+\frac{x^2}{100}\right)\%$$

5. ఒక స్థూపం లేదా శంఖువులో, ఒకవేళ ఎత్తులో ఎలాంటి మార్పు లేకుండా కేవలం వ్యాసార్ధంలో $x\%$ మార్పు వస్తే, అపుడు దాని ఘనపరిమాణంలో మార్పు

$$=\left[\left(1+\frac{x}{100}\right)^3-1\right]\times 100\%$$

6. ఒకవేళ x, y, మరియు z భుజాలుగా గల మూడు సమఘనములో కరిగిపోయి, దాని నుండి ఒక పెద్ద సమఘనం ఏర్పడినట్లయితే, అపుడు ఏర్పడిన కొత్త సమఘనం యొక్క భుజం

$$=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$$

Lab Activity

1. ఒక అర్ధగోళం యొక్క వ్యాసార్థానికి (r) కి సమాన వ్యాసార్థం (r) కల్గిన ఒక స్థూప యొక్క ఎత్తు '2r' అయినపుడు అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యం, స్థూపం యొక్క వక్రతల వైశాల్యానికి సమానం అని చూపుట(Lab Activity)
2. స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణ సూత్రాన్ని ($\pi g^2 h$) దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం సూత్రం ఆధారంగా ప్రయోగాత్మకంగా రాబట్టుట (Lab Activity)
3. గోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యానికి – సూత్రాన్ని ప్రయోగ పూర్వకంగా (దారం – వృత్తవైశాల్యం ఆధారంగా) నిరూపించుట.
4. శంఖువు ఘనపరిమాణం – స్థూపం ఘనపరిమాణంల మధ్యగల సంబంధాన్ని ప్రయోగపూర్వకంగా నిరూపించుట

   (స్థూపం ఘ.ప = 3. శంఖువు ఘ.ప)
5. సమర్ధవంతమైన ప్యాకింగ్

   (i) ఒక దీర్ఘఘనం (కొలతలలో)

   (i) ఘనపరిమాణం స్థిరంగా ఉంటూ (i) కనిష్ఠ సంపూర్ణతల వైశాల్యం

   (ii) గరిష్ఠ సంపూర్ణతల వైశాల్యం

   (ii) సంపూర్ణతల వైశాల్యం స్థిరంగా ఉంటు

   (i) గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం ఉండే సందర్భాలు

   (ii) కనిష్ఠ ఘనపరిమాణం ఉండే సందర్భాలు

5

సాంఖ్యక శాస్త్రం

ఉపోద్ఘాతము

నేటి ప్రపంచములో వివిధ రంగాలకు సంబంధించిన సంఖ్యాపరమైన సమాచారాన్ని అందరూ వివిధ రకాలుగా ఉపయోగించుకొంటున్నారని మనకు తెలుసూ! ఉదా: జనాభా వివరాలు, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తి మరియు బడ్జెట్. ఈ విధముగా వివిధ రంగాలలోని అంశములను అధ్యయనం చేసి, భవిష్యత్‌లోని అవసరముల దృష్ట్యా ప్రణాళికలు ఏర్పాటుచేసుకొనుటకు సమాచారాన్ని వినియోగించడం జరుగుతుంది.

ఈ రకంగా సంఖ్యాపరమైన సమాచారాన్ని సేకరించి అధ్యయనం చేసే గణిత విభాగమే "స్టాటిస్టిక్సు'. ఇదే "స్టాటిస్" అనే లాటిన్ పదం నుండి ఉత్పతన్నమైందనని తెలియుచున్నది. "సర్ రోనాల్డ్ ఫిషర్" సాంఖ్యకశాస్త్రంను ఇతర శాస్త్రంల అధ్యయనం కొరకు విస్తరింప చేసినారు. ఇతనిని సాంఖ్యకశాస్త్ర పితామహుడు అని అంటారు. సాంఖ్యక శాస్త్ర విస్తృత ఉపయోగమును దృష్టిలో ఉంచుకొని "సాంఖ్యకశాస్త్రం"లోని వివిధ భావనలను విద్యార్థుల స్థాయిలకు అనుగుణముగా 6వ తరగతి నుండి 10వ తరగతి వరకు ప్రవేశపెట్టడం జరిగినది. ఒకసారి తరగతుల వారీగా విషయాల విభజన గ్రిడ్‌ను మనం పరిశీలిద్దాం.

సాంఖ్యక శాస్త్రంలోని అంశములను తరగతి వారీగా విభజన

6వ తరగతి	7వ తరగతి	8వ తరగతి	9వ తరగతి	10వ తరగతి
దత్తాంశ నిర్వహణ(10 గంటలు) • దత్తాంశం అంటే ఏమిటి • దత్తాంశ సేకరణ మరియు నిర్వహణ దత్తాంశ నిర్వహణ – గణన చిహ్నాలు – పట్టికలకు ఉదాహరణ. •పట చిత్రాలు, పటచిత్రాలలో ''స్కేలు'' ఆవశ్యకత. పట చిత్రాల నిర్మాణము మరియు వివరణ •కమ్మీ రేఖా చిత్రాలను ఇచ్చిన దత్తాంశనికనుగుణంగా నిర్మించటం కమ్మీరేఖ చిత్రాల వివరణ.	**దత్తాంశ నిర్వహణ** (15 గంటలు) దత్తాంశం సేకరణ మరియు నిర్వహణ • అవర్గీకృత దత్తాంశానికి అంక మధ్యమం, మధ్యగతం మరియు బాహుళకం మరియు అవి సూచించే విషయాల అవగాహన •కమ్మీరేఖా చిత్రాలు • జంట దిమ్మె చిత్రాల నిర్మాణం • రేఖాచిత్రాలు తగు సమాచారం తో	**దత్తాంశ నిర్వహణ** (15 గంటలు) **పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలు మరియు గ్రాఫులు** • ముడి దత్తాంశమునకు అంకగణజత మధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములు పునర్విమర్శ. • అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు విచన పద్ధతిలో అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనుట •వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క పరిధి • పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలను తయారుచేయుట. • పౌనఃపున్య పట్టికలను సంచిత పౌనఃపున్యాలను తయారుచేయుట. •పౌనఃపున్య వక్రాలు (సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి, వక్రము, ఓజివ్ వక్రములు) గీయుట.	**సాంఖ్యకశాస్త్రం మరియు సంభావ్యత** (15 గంటలు) (i) **సాంఖ్యకశాస్త్రం** • అవర్గీకృత మరియు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనాల పునర్విమర్శ • అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనాల సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకము (భారత్వ అంశాలు) (ii) **సంభావ్యత** • ప్రయోగాల ద్వారా లభించిన దత్తాంశానికి సంభావ్యతాను భూతి. • నాణెములను ఎగురవేయుట, పాచికలను విసురుట ద్వారా ఘటన భావం •అనేక సార్లు విసురుట ద్వారా 1 నుంచి 6వరకు సంభవించిన ఘటనలను లెక్కించటం మరియు పట్టికలు తయారు చేయుట.	**దత్తాంశ సేకరణ** (i) **సాంఖ్యకశాస్త్రం** **(15 పీరియడ్లు)** • అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకమును కనుగొనడం. • వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకమును కనుగొనుటను అవగాహన చేసుకోవడం. • సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకము యొక్క ఆవశ్యకత. • వర్గీకృత/అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకంనకు సంబంధించిన సమస్యలు • ఓజివ్ నుపయోగించి మధ్యగతం విలువను కనుగొనడం.

సాంఖ్యక శాస్త్రంలోని అంశములను తరగతి వారీగా విభజన

6వ తరగతి	7వ తరగతి	8వ తరగతి	9వ తరగతి	10వ తరగతి
			• యాదృచ్ఛిక భావంను నాణంను ఎగురవేయుట, పాచికను విసురటతో పోల్చుట. • నాణెం ఎగురవేయుట, పాచికలు విసురుట వంటి ప్రయోగాల ద్వారా సంభావ్యత భావన సాధారణీకరించుట మరియు సంగ్రపరచుట • నాణెం మరియు పాచికల ద్వారా సంభవించిన ఘటనల పౌనఃపున్యాలను దృశ్యరూపంలో వ్యక్తపరచుట. ఒకే రకమైన పాచికలు మరియు నాణేలను అధిక సంఖ్యలో విసిరి ఫలితాలను ప్రాథమిక ఘటనల కోసం మదింపు చేయటం. • పెద్ద సంఖ్యలో పునరావృత ఘటనలను మదింపుచేసి నాణెం యొక్క దత్తాంశమును, పాచికలను విసురుటతోనూ యాదృచ్ఛిక భావనను పోల్చటం.	

స్థూలంగా సాంఖ్యకశాస్త్రంలో ఈ కింది అంశాలు ఇమిడి ఉంటాయి.

1. దత్తాంశాన్ని సేకరించుట 2. దత్తాంశాన్ని వర్గీకరించుట 3. దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించుట 4. దత్తాంశాన్ని వ్యాఖ్యానించుట	⟵ దత్తాంశ నిర్వహణ

మనం 8 మరియు 9 తరగతులలోనే "దత్తాంశము" భావన, దత్తాంశ రకాలు (ప్రాథమిక/గౌణ) అనే భావనలు సవివరంగా పరిచయం చేయడం జరిగినది. అదేవిధముగా దత్తాంశమును వర్గీకరించే సందర్భములో చర్చించిన అంశాలు ఒకసారి పరిశీలిద్దాం.

ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు కింది విధంగా ఉంటే

60	75	82	45	68	38
48	62	53	61	80	95
19	24	63	72	85	56
58	60	75	82	35	48
27	38	80	95	46	53

పై దత్తాంశములోని అంశాలను విశ్లేషణ చేయడానికి కొంత కష్టతరం అవుతుందని మనము గమనించవచ్చును.

పై దత్తాంశమును సులభముగా విశ్లేషణ చేయగలమా ?

పై దత్తాంశమును ఒక క్రమపద్ధతిలో తరగతులుగా విభజించడం ద్వారా సులభంగా విశ్లేషణ చేసి, తద్వారా దత్తాంశాన్ని సరిగా వ్యాఖ్యానించగలమని మనకు తెలుసుకదా!

- **మొదట ఇచ్చిన దత్తాంశంను ఏమంటారు ?**
- **ఒక క్రమపద్ధతిలో తరగతులుగా విభజించడం ద్వారా వచ్చే దత్తాంశంను ఏమంటారు?**

ఈ రకమైన విభాజనను "పౌనఃపున్యవిభాజన" పట్టిక అని అంటాం.

- **పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక రూపంలో రాయవలెనంటే విద్యార్థికి ముందు వారికి ఏ అంశాలపై అవగాహన పరచాలో తెలియచేయండి.**
- **పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు ఎన్ని విధాలుగా రాయగలము ?**
- **పై పద్ధతిలోనే కాకుండా దత్తాంశాన్ని ఇంకా ఏదైన పద్ధతిలో ప్రదర్శించడానికి వీలవుతుందా? ఆలోచించండి.**

9వ తరగతిలో అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు "కేంద్రీయ స్థానీయ" కొలతలు (i) సగటు (ii) మధ్యగతము (iii) బాహుళకము లను కనుగొని, ఆ దత్తాంశమును గూర్చి విశ్లేషణ చేయడం, విద్యార్థులకు అవగాహనా పరచడం జరిగిందని మనం గమనించవచ్చును. అదే విధంగా 10వ తరగతిలో వర్గీకృత దత్తాంశమునకు i) సగటు (మూడు పద్ధతులు) ii) మధ్యగతము iii) బాహుళకములను సూత్రంల సహాయంతో గణించి దత్తాంశ విశ్లేషణ మరియు వాఖ్యానము చేయడంపై విద్యార్థులు సరియైన అవగాహనా పొందుతారని మనం గమనించవచ్చు.

- **వర్గీకృత దత్తాంశమును వ్యాఖ్యానించుట కొరకు పై సూత్ర పద్ధతులు కాకుండా వేరే పద్దతులు ఏవైనా సూచించగలరా?**

సాధారణంగా 8వ తరగతిలో విద్యార్థులకు i) పౌనఃపున్యబహుభుజి ii) పౌనఃపున్యవక్రం గ్రాఫ్ పేపరుపై ప్రాతినిధ్యపరచడం పై అవగాహనా కల్పించడం జరిగింది. మరింత లోతుగా విస్తృత అవగాహన కొరకు 10వ తరగతిలో "ఓజివ్" వక్రాల గీయడం గూర్చి చర్చించడం జరిగింది. తద్వారా వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతంను కనుగొనడం కూడా పరిచయం చేయడం జరిగింది.

నిత్యజీవితంలో ఏదైన సంఘటన జరగడానికి అవకాశంను కొలవగలమా? ఇలాంటి సంఘటనలు జరిగే లేదా జరగకపోవడానికి అవకాశంలను సంఖ్యాత్మకముగా కొలిచె విధానము గూర్చి 9వ తరగతి మరియు 10వ తరగతిలోనే "సంభావ్యత" అనే అధ్యాయములోనే చర్చించడము జరిగింది. మరొకసారి "సంభావ్యత" అధ్యాయమునకు సంబంధించిన కొన్ని అంశాలు చర్చించుకొందాము.

- **సంభావ్యత అనగా నేమి?**
- **సంభావ్యత అనే అధ్యాయములోని కీలక పదంలను తెల్పండి.**

మొదటగా "యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం" అనే భావన గూర్చి 9వ తరగతిలోనే పరిచయం చేయడం జరిగినది. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటే ఏమిటి? ప్రాథమికంగా యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంనకు రెండు లక్షణంలు ఉంటాయని మనం గమనించవచ్చును.

1) ప్రయోగ ఫలితాల జాబితా ముందుగానే తెలుస్తుంది.

2) అదే పరిస్థితులలో ఆ ప్రయోగంను నిర్వహించినప్పుడు, ప్రత్యేక సందర్భంలో ఏ ఫలితము వస్తుందో ఊహించలేము.

ఉదా: 1) ఒక నిష్పాక్షిక నాణెమును ఎగురవేయుట

2) ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించుట

3) ఒక సంచిలో నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీయుట.

- **యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం మరియు భౌతికశాస్త్ర ప్రయోగంలకు గల తేడాలను పేర్కొనండి.**

ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించడం "ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము" అని మనకు తెలుసు! కావున అట్టి ప్రయోగ ఫలితాల జాబితాను ముందుగానే ఊహించగలము. 1, 2, 3, 4, 5, 6 అనే అంకెలు దొర్లించిన పాచిక ముఖంపై తిరగబడుతుందని తెలుస్తుంది. దీనిని $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ అనే సమితి రూపంలో కూడా రాయవచ్చును. ఈ సమితిని శాంపిల్ ఆవరణం అని అంటారు. దీనిని S అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

$$\therefore S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

అదేవిధముగా రెండు నాణెములు ఎగురవేసినపుడు శాంపిల్ ఆవరణం $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ గా రాయగలము. ఇచ్చట $H \rightarrow$ బొమ్మ మరియు $T \rightarrow$ బొరుసు.

- **మూడు నిష్పాక్షిక నాణెములను ఎగురవేసే ప్రయోగములోని శాంపిల్ ఆవరణంను రాయండి.**
- **రెండు పాచికలను దొర్లించే ప్రయోగంలోని శాంపిల్ ఆవరణంను రాయండి.**

ఒక పాచికను యాదృచ్ఛికంగా దొర్లించే ప్రయోగంలోని శాంపిల్ ఆవరణం $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ అని మనం చర్చించుకున్నాము. ఒక పాచికను దొర్లించునపుడు సరిసంఖ్యపడటం అనగా ఏమిటో తెలుసుకొందాము. సరిసంఖ్య పడటం అనగా పాచిక ముఖంపై 2 లేదా 4 లేదా 6 రావడం. దీనిని కూడా $\{2, 4, 6\}$ అనే సమితి రూపంలో రాయవచ్చు గదా! $\{2, 4, 6\}$ అనుకొంటే E మరియు S అనే సమితుల మధ్య సంబంధము ఏమవుతుంది? $E \subset S$ అని గమనించవచ్చును. E ని మనం "ఘటన" అని అంటాం.

S కు వ్యవస్థితం మయ్యే ప్రతి ఉపసమితి "ఘటన" అంటారు.

పై సందర్భములోనే "సరిసంఖ్యపడటం" అనే ఘటనకు 2 లేదా 4 లేదా 6ను "అనుకూల పర్యవసానాలు" అంటాము. శాంపిల్ ఆవరణం (S)లోని మూలకంల సంఖ్యను ఆ యాదృచ్ఛికం ప్రయోగంలోని మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య అని అంటారు. దీనిని n(S)తో సూచిస్తారు. A అనేది ఘటన అయితే n(A)ను ఏమంటారో ఊహించండి.

$n(A)$ ను A కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య అని అంటారు. 9వ తరగతిలో ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత గూర్చి అధ్యయనం చేయడం జరిగింది. 10వ తరగతిలో సైద్ధాంతిక సంభావ్యతను పరిచయం చేయబడినది.

సైద్ధాంతిక సంభావ్యత — **ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని శాంపిల్ ఆవరణం "S" ఏదేని ఘటన "E" అయిన E ఘటన యొక్క సంభావ్యతకు P(E) తో సూచిస్తారు.**

ఇచ్చట $P(E) = \dfrac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}} = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

నోట్ :-

1. $n(E) \leq n(S) \Rightarrow \dfrac{n(E)}{n(S)} \leq 1$
2. $0 \leq P(E) \leq 1$
3. P(E) ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకము

- **ఒక పాచికను దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో (i) సరిసంఖ్య (ii) బేసి సంఖ్య పడే ఘటన సంభావ్యతలను కనుగొందాము.**

సాధన : ఇచ్చట $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

సరిసంఖ్యపడే ఘటన A అనుకొనిన

అప్పుడు $A = \{2,4,6\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

బేసిసంఖ్యపడే ఘటన B అనుకొనిన

అప్పుడు $B = \{1, 3, 5\}$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ అని మనకు తెలుసూ!

పై సమస్యలో $A \cap B$ ఏమవుతుంది?

$A \cap B = \phi$ అవుతుందని మనం గమనించవచ్చును. కావున A, B లను "పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు" అని అంటారు. 7 కంటే పెద్ద సంఖ్య పడే ఘటన E అనుకొంటే $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$ అవుతుంది. E ని "అసంభవ ఘటన" అవుతుంది.

నోట్ : E ఒక ఘటన అయితే $\bar{E}$ ను పూరక ఘటన అంటారని మనకు తెలుసుగదా!

$P(E), P(\bar{E})$ **ల మధ్య సంబంధము గూర్చి చర్చించండి.**

మనం $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ అని గమనించవచ్చు.

సూచన: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ అనుకొంటే

$$P(\bar{E}) = \frac{n(S) - n(E)}{n(S)}$$ అవుతుంది.

$$= 1 - \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= 1 - P(E)$$

$$\therefore \boxed{P(E) + P(\bar{E}) = 1}$$

- ఒక లీఫ్ సంవత్సరం కాని సంవత్సరంలో 53 సోమవారాలు ఉండే ఘటన సంభావ్యత ఎంత?
- ఒక లీఫ్ సంవత్సరం 53 ఆదివారాలు రావడానికి గల సంభావ్యత ఎంత?
- సంభావ్యత అధ్యాయంనకు సంబంధించి ఏవేని 5 భావనలపై ప్రశ్నలను రూపొందించండి?

పై తరగతులలో సంభావ్యత గూర్చి లోతుగా విస్తృతంగా అధ్యయనం చేయడం జరుగుతుంది. కావున మనం నియత సంభావ్యత, సంభావ్యతా సిద్ధాంతములు మరియు సంభావ్యతా విభాజనంల గూర్చి ప్రస్తుతం చర్చించుకోవలసిన అవసరం లేదు.

మీ తరగతిలోని FA-I లో విద్యార్థుల వివిధ సబ్జెక్ట్‌లలో సాధించిన గ్రేడుల ఆధారంగా సాంఖ్యక శాస్త్రంను ఉపయోగించి మీరు రూపొందించగలిగే వివిధ ప్రాజెక్ట్‌ల గూర్చి చర్చించండి.

6

గణిత ప్రయోగశాల కృత్యాలు

ఉపోద్ఘాతం

విద్యార్థులు గణితం పట్ల ఆసక్తి మరియు భయాన్ని పోగొట్టుకొని ఆహ్లాదకర వాతావరణంలో అభ్యసనం చేయుటకు మరియు అమూర్త భావనలను అర్థం చేసుకొనుటకు గణిత ప్రయోగాలు చేయడం చాలా అవసరం. దీన్ని దృష్టిలో ఉంచుకొని గణితంలో విద్యార్థులకు వారి స్థాయికి అనుగుణంగా ప్రయోగాత్మక కృత్యాలు నిర్వహించవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీని కొరకు మనము కొన్ని కృత్యాలను పరిశీలిద్దాం.

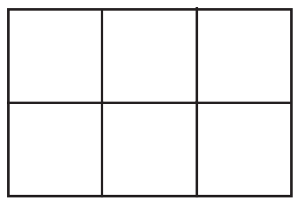
లక్ష్యం : మొదటి m బేసి పూర్ణాంకాల మొత్తమునకు సూత్రమును ప్రతిపాదించుట.

కావలసిన సామాగ్రి : కార్డుబోర్డు/చార్ట్, కత్తెర, స్కేలు, పెన్సిల్.

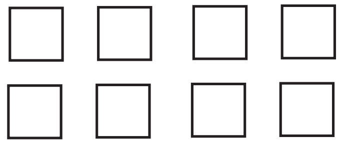
తయారుచేయు విధానం :

1. పటం 1లో చూపిన విధంగా కార్డుబోర్డు / చార్ట్‌పై యూనిట్ చతురస్రాలను గీయండి.

2. పటం. 2 లో చూపిన విధంగా అవసరమైన సంఖ్య గల యూనిట్ చదరాలను కత్తిరించండి.



పటం. 1



పటం. 2

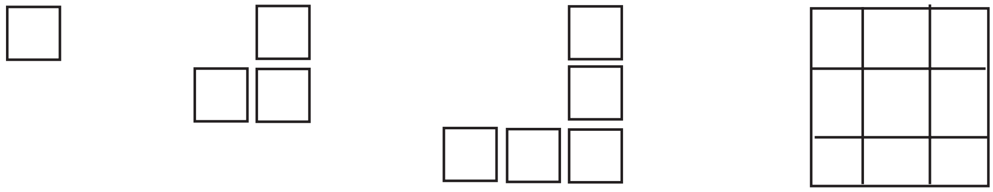
ప్రదర్శన :

1. మొదటి రెండు బేసి పూర్ణాంకాల మొత్తం

$1 + 3 = 4 = 2^2$

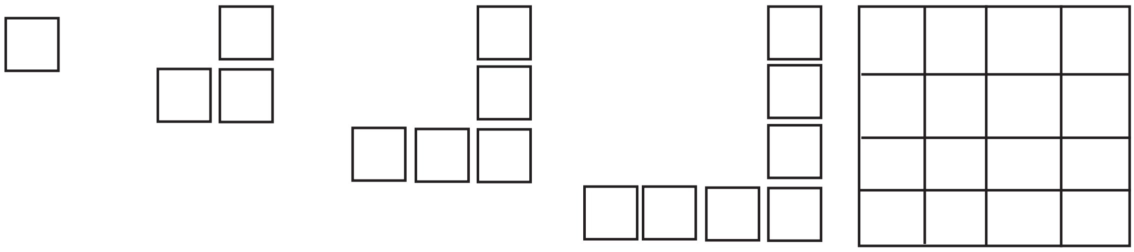
2. మొదటి మూడు బేసి పూర్ణాంకాల మొత్తం

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$



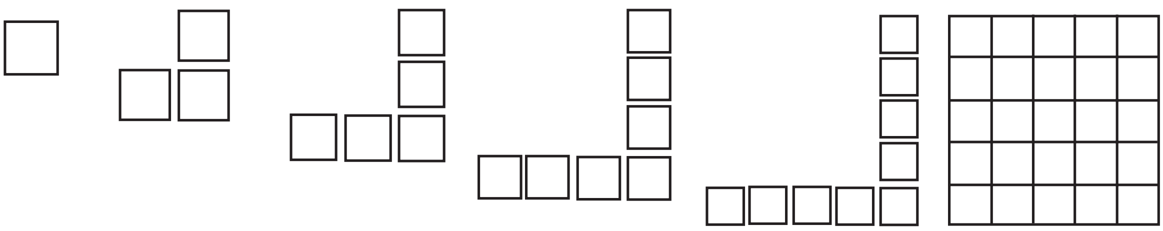
3. మొదటి నాల్గవ బేసి పూర్ణాంకాల మొత్తం

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$



4. మొదటి ఐదు బేసి పూర్ణాంకాల మొత్తం

$1 + 3 + 5 + 7 = 9 = 25 = 5^2$



5. కాబట్టి మొదటి బేసి m పూర్ణాంకాల మొత్తం

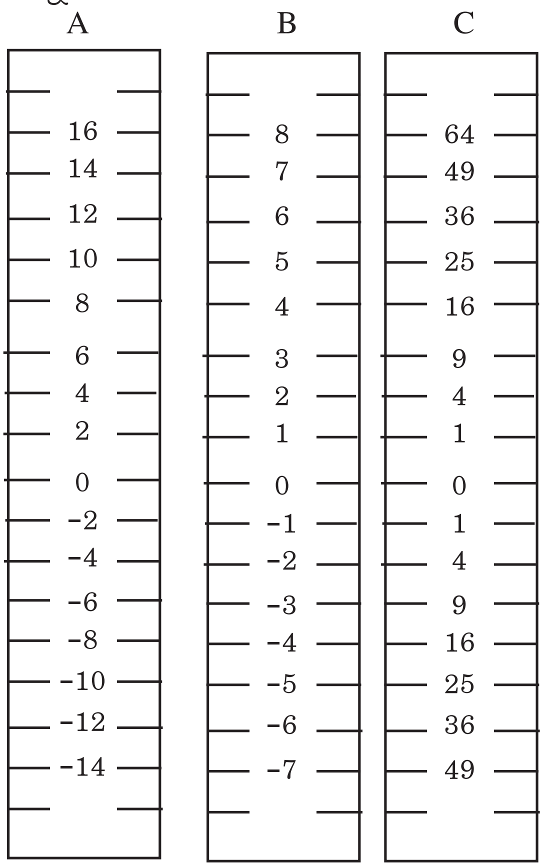
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 \ldots.. (2m - 1) = m^2$

కృత్యం (బీజగణితం)

లక్ష్యం : వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించుట.

కావలసిన సామాగ్రి : కార్డుబోర్డు, తెల్లకాగితం, స్కేలు, స్కెచ్ పెన్ను.

తయారుచేయు విధానం :



1. పటం.1లో చూపిన విధంగా కార్డుబోర్డును మూడు పట్టీలుగా కత్తిరించి, వాటిపై తెల్లకాగితాన్ని అతికించండి.
2. పట్టీలకు A, B, C లుగా గుర్తించాలి.
3. B పట్టీపై సాధారణ సంఖ్యారేఖను నిట్టనిలువుగా సంఖ్యలను రాయండి. (... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 ...)
4. A పట్టీపై అవే విభాగాలకు B పట్టీలోని సంఖ్యలను రెట్టింపు చేసి గుర్తించండి.(...−6, −4, −2, 0, 2, 4, 6 ...)
5. C పట్టీపై అవే విభాగాలకు B పట్టీలోని సంఖ్యల వర్గాన్ని గుర్తించండి. (....9, 4, 1, 0, 1, 4, 9....)
6. A, C పట్టీలు స్థిరంగా ఉంటాయి. B పట్టీ వాటి మధ్యలో పైకి, క్రిందికి జరిపే విధంగా అమర్చాలి. మూడు పట్టీలలోని సున్నాలు ఎప్పుడూ ఏకీభవించాలి.

ప్రదర్శన

1. $x^2 + 6x + 8 = 0$ వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించుటకు B పట్టిలోని '0' (సున్న), A పట్టిలోని 6(x గుణకం)తో ఏకీభవించునట్లుగా B పట్టీని జరుపవలెను.
2. B పట్టీలోని '0'(సున్న)తో ఏకీభవించే C పట్టీలోని సంబంధిత రీడింగ్ 9ని గుర్తించండి.
3. ఈ 9 నుండి వర్గసమీకరణంలోని స్థిరపదం 8ని తీసివేయగా ఫలితం 1 వస్తుంది.
4. ఈ 1 యొక్క స్థానం C పట్టీపై పరిశలిస్తే అది రెండు స్థానాలలో ఉంటుంది.
5. C పట్టీలోని 1లతో ఏకీభవించే B పట్టీలోని విలువలు రెండు అవి : −2, −4.

కాబట్టి మూలాలు = −2, −4

$\therefore x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

పరిశీలన :

$x^2 + 6x + 8 = 0$

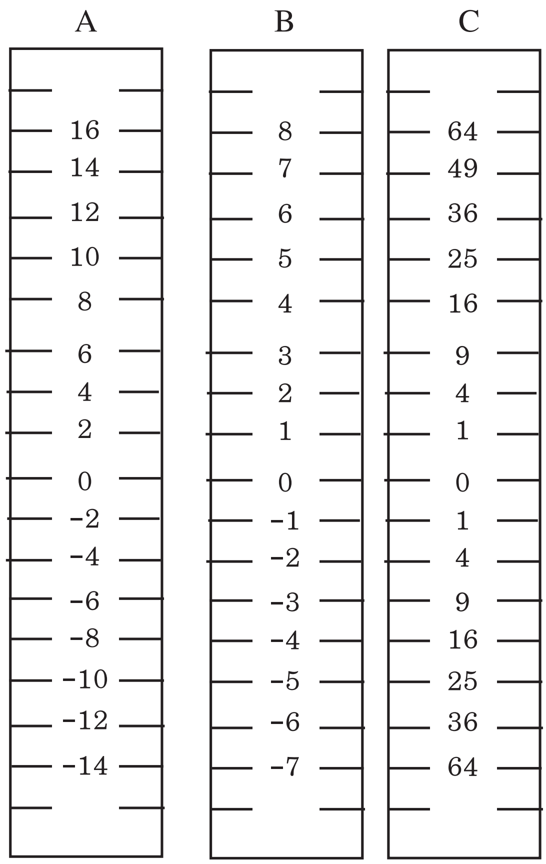
$x^2 + 6x + 9 + 8 - 9 = 0$

$(x + 3)^2 = 9 - 8 = 1$

$x + 3 = \sqrt{1} = \pm 1$

$x = -2, x = -4$

$\therefore x = -2, -4.$



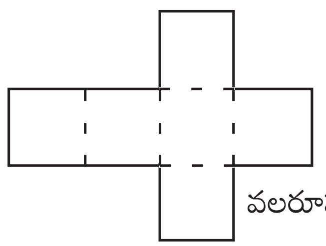
కృత్యం (క్షేత్రమితి)

లక్ష్యం : ఘనాన్ని తయారుచేసి దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.

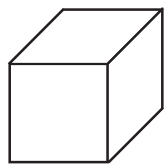
కావలసిన సామాగ్రి : స్కేలు, కత్తెర, సెల్లోటేపు, పెన్సిలు / స్కెచ్‌పెన్ను, చార్టు (మందమైనది)

తయారుచేయువిధానం :

1. ప్రతి భుజం a యూ. కొలతగల ఆరు సమాన చతురస్రాలను ఒక మందమైన చార్టుపై పటంలో చూపినట్లుగా వలరూపాన్ని గీసి కత్తిరించండి.
2. పటంలో చూపిన విధంగా ఘనం ఏర్పడడానికి వలరూపంలోని చుక్కల గీత వెంబడి చతురస్రాలను మడవండి. సెల్లో టేపుతో అతికించండి.



వలరూపం



ప్రదర్శన :

1. ఘనంలోని ప్రతి తలం a భుజం గల చతురస్రం. కాబట్టి ప్రతి తలం వైశాల్యం a^2.
2. a భుజం గల ఘనంలో మొత్తం ఆరుతలాలు ఉన్నాయి.
3. అందువల్ల, a భుజం గల ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $6a^2$.

పరిశీలన

వాస్తవ కొలతలు తీసుకున్న పిదప :

భుజం కొలత a =

కాబట్టి, ఒక తలం వైశాల్యం = a^2 =

అన్ని తలాల వైశాల్యాల మొత్తం = ...+...... + ...+ ....+ ....+ .....

అందువల్ల, ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $6a^2$ = ...

వినియోగం :

ఈ ఫలితం, వస్తువులను ఘనాకార డబ్బాలలో ప్యాకింగ్ చేయడానికి అవసరమైన సామాగ్రిని అంచనా వేయడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

కృత్యం (క్షేత్రమితి)

లక్ష్యం : దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.

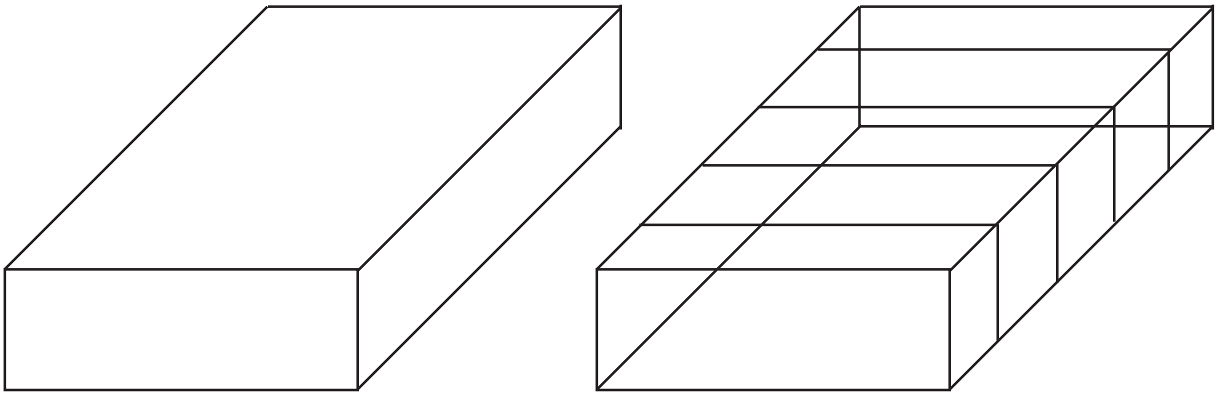
కావలసిన సామాగ్రి :

దీర్ఘఘన వలరూపం, బంకమట్టి, చాకు (కత్తి), స్కేలు, కార్డుబోర్డు.

తయారుచేయువిధానం :

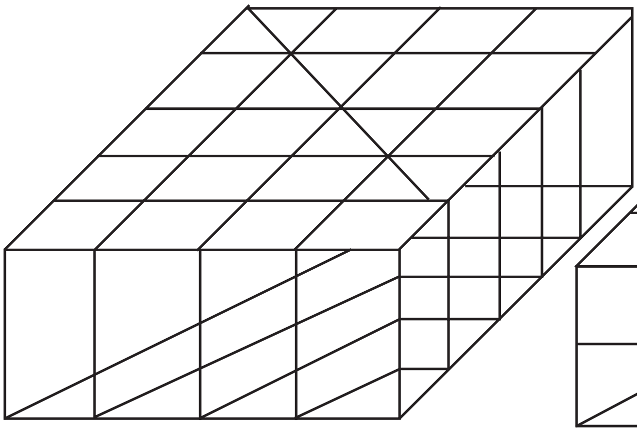
1. పొడవు l, వెడల్పు b, ఎత్తు h కొలతలు గల దీర్ఘ ఘన వల రూపాన్ని తీసుకోండి. (ఉదా: l = 5యూ, b = 4యూ, h = 2 యూ)
2. మూతలేని దీర్ఘఘనం ఏర్పడునట్లుగా వలరూపాన్ని మడవండి. దానిలో బంకమట్టిని నింపి, వలను తొలగించండి.

3. దీర్ఘఘనాన్ని కార్డుబోర్డుపై నుంచి, పటం. 1లో చూపిన విధంగా పొడవు వెంబడి దానిని ఐదు సమభాగాలుగా కోయండి.

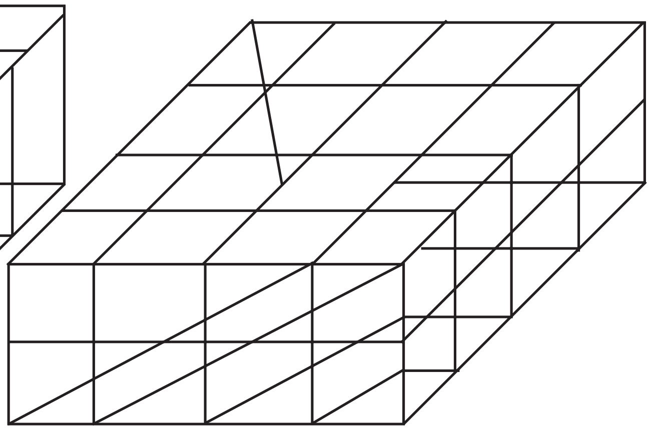


పటం. 1

4. పటం. 2లో చూపిన విధంగా దీర్ఘఘనం యొక్క వెడల్పు వెంబడి దానిని నాల్గు సమభాగాలుగా కోయండి.



పటం. 2



పటం. 3

5. తరువాత పటం. 3లో చూపిన విధంగా దీర్ఘఘనాన్ని దాని ఎత్తు వెంబడి రెండు సమభాగాలుగా కోయండి.

ప్రదర్శన :

1. దీర్ఘఘనం 1యూ. ఘనములుగా విడగొట్టబడింది.
2. మొత్తం 40 సమఘనములు ఏర్పడినవి. దీనిని $5 \times 4 \times 2$ గా కూడా తెలుపవచ్చు.
3. దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం = $5 \times 4 \times 2$ ఘ.యూ. = $l \times b \times h$
4. అదేవిధంగా $2 \times 1 \times 2$ ఘ.యూ, $3 \times 4 \times 2$ ఘ.యూ. $5 \times 3 \times 2$ ఘ.యూ. దీర్ఘఘనములను తయారుచేయండి.
   పై సోపానాలను తిరిగి రాయండి.

పరిశీలన :

క్రమ. సం.	l	b	h	మొత్తం సమ ఘనముల సంఖ్య (ఘనపరిమాణం)	$l \times b \times h$ (ఘనపరిమాణం)
1.	5	4	2	40	$5 \times 4 \times 2$
2.	2	1	2	–	$- \times - \times -$
3.	3	4	2	–	$- \times - \times -$
4.	5	3	2	–	$- \times - \times -$

వినియోగం :

ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని వివరించడానికి ఈ కృత్యాన్ని వినియోగించ వచ్చును.

కృత్యం (క్షేత్రమితి)

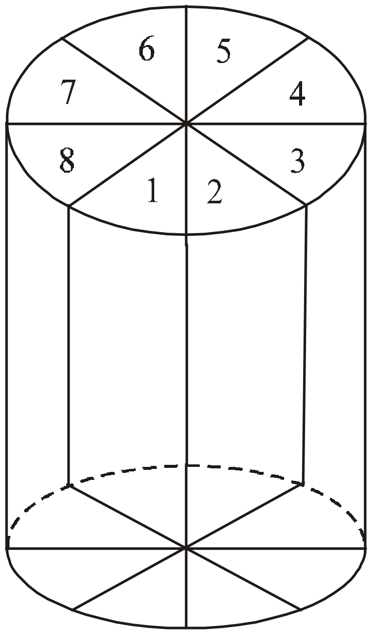
లక్ష్యం : క్రమవృత్తాకార స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణానికి సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించుట.

కావలసిన సామాగ్రి :

లోహపు స్థూపాకార డబ్బా, చాకు (కత్తి), బంకమట్టి, స్కేలు, కార్డుబోర్డు, పెన్ను/పెన్సిల్

తయారుచేయువిధానం :

1. ఒక లోహపు స్థూపాకార డబ్బాను తీసుకొని దానికిరువైపుల తెరచి వేయండి. దాని ఎత్తును కొలవండి. దాని ఎత్తు h అనుకోండి.
2. డబ్బాను కార్డుబోర్డుపై నుంచి, దానిలో బంకమట్టిని నింపండి.
3. నెమ్మదిగా డబ్బాను తొలగిస్తే క్రమవృత్తాకార స్థూపం ఏర్పడుతుంది.
4. పటం. 1లో చూపిన విధంగా మట్టిని వీలైనన్ని భాగాలుగా కత్తితో కోసి, వాటిని 1,2,3,4,5,6,7,8 ... అని పేరు పెట్టండి.



పటం. 1

5. ఆ భాగాలను పటం.2లో చూపిన విధంగా అమర్చండి.

ప్రదర్శన :

1. పటం.2లోని పటం దీర్ఘఘనం వలె ఉంది.

2. దీ.ఘ. పొడవు = $\frac{1}{2} \times$ స్థూపం భూమి చుట్టుకొలత.

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$

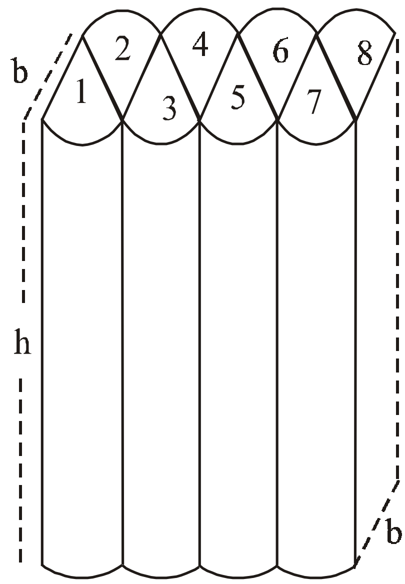
3. దీ.ఘ.వెడల్పు = స్థూపం భూవ్యాసార్ధం = r

4. దీ.ఘ.ఎత్తు = స్థూపం ఎత్తు = h

5. దీ.ఘ. ఘనపరిమాణం = $l \times b \times h$

$$= \pi r \times r \times h = \pi r^2 h$$

6. స్థూపం ఘ.ప. = స్థూపం ఘ.ప. = $\pi r^2 h$



పటం. 2

పరిశీలన :

వాస్తవ కొలతలను తీసుకున్న పిదప :

1. దీర్ఘఘనం ఎత్తు (స్థూపం) =
2. భూమి వ్యాసార్థం =
3. దీర్ఘఘనం వెడల్పు (స్థూపం) = $(=r)$
4. దీర్ఘఘనం పొడవు (స్థూపం) = $\left(= \frac{1}{2} \times 2\pi r\right)$
5. దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం $= l \times b \times h$
6. స్థూపం ఘనపరిమాణం = ...
7. కాబట్టి స్థూపం ఘనపరిమాణం = దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం ....

$$= \ = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r \times h = ...$$

వినియోగం :

ఈ కృత్యం రకరకాల స్థూపాకార వస్తువులు /పాత్రల ఘనపరిమాణం/సామర్థ్యం తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

గణిత ప్రయోగశాలలో చేయు కృత్యాలు

(6వ తరగతి)

1. దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలతకు సూత్రాన్ని కనుగొనుట.
2. చతురస్రం చుట్టుకొలతకు సూత్రాన్ని కనుగొనుట.
3. దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.
4. చతురస్రం వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.

గణిత ప్రయోగశాలలో చేయు కృత్యాలు

(7వ తరగతి)

1. సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.
2. త్రిభుజ వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ఉత్పాదించుట.
3. సమచతుర్భుజం (రాంబస్) వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించుట.
4. వృత్తం చుట్టుకొలత సూత్రాన్ని కనుగొనుట.
5. వలరూపాలను తయారుచేయుట.

   (i) సమఘనం (ii) దీర్ఘఘనం (iii) పిరమిడ్ (iv) శంఖువు (v) స్థూపం

గణిత ప్రయోగశాలలో చేయు కృత్యాలు

(8వ తరగతి)

1. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించుట.
2. వృత్త వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ఉత్పాదించుట.
3. దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనుటకు సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించుట.
4. సమఘనం ఘనపరిమాణానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.

గణిత ప్రయోగశాలలో చేయు కృత్యాలు

(9వ తరగతి)

1. దీర్ఘఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ఉత్పాదించుట.
2. ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం సూత్రాన్ని కనుగొనుట
3. క్రమవృత్తాకార స్థూపం సంపూర్ణతల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించడం.
4. క్రమవృత్తాకార స్థూపం ఘనపరిమాణానికి సూత్రం కనుగొనుట
5. క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.
6. క్రమవృత్తాకార శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని కనుగొనుట.
7. గోళం ఉపరితల వైశాల్యానికి సూత్రాన్ని ఉత్పాదించుట.

Resources and Reference Books

In any successful teaching learning process, different resources place vital role. Here is a wrong conception that resources means, the material which is used at the time of teaching learning process only. To make the children comprehend the mathematical concepts, teacher as to prepare himself before the teaching learning process. In teaching or learning beyond the text book, different resources are needed. So, teacher has to search for new resources, and access to children, and make the children use in their learning process, which can give support their learning.

Teacher should not limit to teach what is in the text book. For more comprehension, extensive learning we need different resources like Maths kit, digital resources, internet, websites, different institutions / organizations, reference books etc.

Teacher can use them in their classes if they fit into their lesson plan the following list gives a rough idea of the range of different resources available in internet.

The resources have been grouped into a few (loose) categories for facilitate easy navigation.

Websites

The mathforum@Drexel University (http://www.mathforum.org)

The Centre for Innovation in Mathematics Teaching (CIMT) (http://www.cimt.plymouth.ac.uk)

Math cats - Fun math for kids (http://www.mathcats.com), count on (http://www.counton.org)

Illuminations - Resources for teaching maths (http://illuminations.nctm.org) Interactive (http://www.shodor.org/interactivate)

Gadsen Mathematics Initiative (http://www.2.gisd.k12.nm.us/GMIWebsite/ImathResources.html)

Mathematical Interactivities - Puzzles, games and other online educational resources (http://mathematics.hellam.net)

National Library of Virtual Manipulatives (http://nlvm.usu'.edu/en/nav/vlibrary.html)

Mathnet - Interactive mathematics in education (http://www.mathsnetnet)

NewZeaJand maths (http://www.nzmaths.co.nz)

The Mactutor History of Mathematics archive (http://www.historv.mcs.st-and.ac.uk/historv)

Math cartons (http://www.trottermath.net/humor/cartoons.html)

Math Com is (http:/ /home.adelphi.edu/-stemkoski/mathematrixlcom ics.html)

Mathematical quotation server (http://math.furman.edu/-mwoodard/mQs/mQuots.html)

Wolfram Mathword - The web's most extensive mathematical resource (http:// mathworld.wolftam.com)

Optical illusions and visual phenomena (http://www.michaelbach.de/ot)

Optical illusions gallery (http://www.unoriginal.co.uk/opticaI5.html)

Teachers resources online (http://www.cleavebooks.co. uk/trol/index.html)

Interactive: Activities (http://www.shodor.org/interactive/activities/#fun)

Maths articles (http://www.mathgoodies.com/articles)

Math words and some other words of interest (http://www.pballew.net/etvindex.html)

Portraits of scientists and mathematicians

(http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identitv /CF / display results.cfm ?alpha sort=R)

Let epsilon < 0 (http://epsilon.komplexifv.com)

Grand illusion (http://www.grand-illusions.com)

Portrait gallery - Mathematicians (http://mathdl.maa.org/mathDL/46 ?pa=content&sa=view

Document&nodeid=2437&bodyld=2241

Maths teaching ideas (http://www.teachingideas.co.uk/maths/contents.html)

E-books

Illustrated maths formulas - salim (http://www.arvindguptatoys.com/ arvindguptalmathformulas.pdf)

Ramanujan - the man behind the mathematician Sundaresan and Padmavijayam (http:// gyanpedia.in/tft/

Resources/books/ramanuian.doc)

A mathematician's apology - G.H.Hardy (http://math.boisestate.edu/-holems/holmes/

A%20Mathematician%27s%20Apology .pdt)

Puzzle maths - G.Gamov and stem (http://www.arvindguptatoys.com/arvindguptalpuzzlemath.pdf)

1000 uses of a hundred square - Leah Mildred Beardsley (http://www.mediafire.com/

download.php?detnoirueie)

Geometry comic book - Jeane Pierre Petit (http://www.mediafire.coml?udOnnnuizyy)

Elements - Eucid (http://www.mediafire.coml?udOnnnuizyy)

How children learn mathematics (http://gyanpedia.in/tft/Resources/books/mathsliebeck.pdt)

Suggested experiments in school mathematics - J.N.Kapur (http://www.arvindguptatoys.com/arvindguptalinkapur.pdt)

Primary resources - Maths (http://www.primaryresources.co.uk/maths/maths.html)

Proteacher! Maths lesson plans for elementary school teaches (http://www.proteacher.com/100000.html)

Maths activities (http://www.trottermath.net/contents.html)

Maths powerpoints (http://www.worldofteaching.com mathspowerpoints.html)

Maths is fun - maths resources (http://www.mathsisfun.com)

Middle school portal for maths and science teachers (http://www.msteacher.org/math)

Maths games, maths puzzles and maths lessons designed for kids and fun (http://

www.coolmath4kids.com)

Numbers

Magic, squares, magic stars & other patterns (http://recmath.org/Magic%20squares)

Number recreations (http://www.shyamsundergupta.com)

Broken calculator - Maths investigation (http://www.woodlands-iunior.kent.sch.uk/mahts/brokencalculator/

index.html)

Calculator chaos (http://www.mathpalyground.com/CalculatorChaos.html)

Primary school numeracy (http://durham.schooliotter.com/coxhoe/Curriculam+LinkslNumeracy)

Quarks to Quasars, powers of 10 (http://www.wordwizz.com/pwrsofl0.html)

Algebra

Algebra puzzle (http://www.mathpiayground.com/Algebra Puzzle.html)

Algebra ti les (http://mathbits.com/MathBits/AlgebraTiles/AlgebraTiles/MathB itss07ImpFree.html)

(http://mathbits.com/MathBits/ AlgebraTiles/ Algebra Tiles/MathB itss071mpF ree.html)

Geometry (http://www.cvffredin.co.uk)

The Fractory : An interactive tool for creating and exploring fractals (http:// librarv.thinkquestorg/3288/

fractals.html)

Tessellate (http://www.shodor.org/interactivate/activities/Tessellate)

MathSphere-Free graph paper (http://www.mathsphere.co.uk/resources MathSphereFree

GraphPaper.html)

Paper models of polyhedral (http://www.korthalsaltes.com)

Problem solving

Mathpuzzle (http://www..mathpuzzle.com)

Puzzling world of polynedral dissections (http://www.iohnrausch.com/ PuzzlingWorld?contents.html)

Interactive mathematics miscellany and Puzzles (http://www.cut-the-knotorg)

Puzzles and projects (http://www.delphiforfun.org/Programs/lndices/proiectsIndex.html)

10ticks daily puzzle page (http://www.IOticks.co.uk/s dailvPuzzle.aspx)

Archimedes laboratory - teachers' resource: Improve problem solving skills (http:// www.archimedeslab.

org/indexteachers.html) Brain teasers (http://www.pedagonetcomfbrain/brainers.html)

Gymnasium for Brain (http://www.gvmnasiumforbrain.com)

Puzzles and games (www.thinks.com)

Mathematical imagery (http://www.ioslevs.com)

Miscellaneous

1. Introduction to Geometric Constructions (by Ramesh Krishnamurthi)
2. 59 mathematical ideas (by Tony Willy)
3. Sacred Geometry (by Thames & Hudson)
4. Mathematics for all (by UNESCO)
5. 536 Puzzles & curious problems (by Henry Ernest Dudemy)
6. A problem solving approach through generalising a specializing (by Rina Zazkis, Simon Fraser University)
7. Challenging problems in Geometry (by Alfred Posamentier, Charles T. Salkind)
8. Sources of mathematical discovery
9. Hindu Geometry (by Bibhutibhusan Datta and Avadhesh Narayan Singh)
10. An introduction to contemporary mathematics (by John Hutchinson)
11. Graphs and their uses (by Oystein Ore, Yale University)
12. A passion for mathematics (by Clifford A. Pickover)
13. Algebra with Arithmetic and Mensuration (From the SANSCRIT) (or Brahmegupta and Bhascara) (transalated by Henry Thomas Colebrooke)
14. The Aryabhattiya of Aryabhatta (translated by Waltger Eugene Clark)
15. Euclid's Elements of Geometry (translation by Richard Fitzpatrik)
16. Geometry and the imagination (by D. Hilbert, Schon - Vossen)
17. Patterns of plausible inference (by G. Polya)
18. A History of Mathematical Notations (by Florian Cajori, California)
19. Integrated Algebra-1 (by Annxavier Gantert)
20. The Fundamental theorem of Arithmatic (by Mir Publishers, Moscow)
21. Mathematical reasoning writing and proof (by Ted Sundstrom)
22. Mathematical problems and puzzles (by S. Straszewicz)
23. Dictionary of Mathematics (Oxford)

24. How to solve it ? (by G. Polya)
25. Q.E.D. (Beuaty in Mathematical proof by Polstar)
26. Mysteries of the equilateral triangle (by Brian J. Mc Cartin)
27. The contest problem book VIII (by J. Douglas Faires and David Wells)
28. Introduction to the Foundations of Mathematics (by Raymond L. Wilden)
29. The Universal Book of Mathematics (by David Darling)
30. The Nothing that is (A natural history of zero) (by Robert Kaptan)
31. Magazines related to Mathematics
32. University Press Dictionary of Mathematics - John DE Clark
33. Short stories about numbers - Rajneesh Kumar
34. A premier on number sequences - Shilesh Sherali
35. Maths Charmers - Alfred S. Posamentior
36. Mathematics Maxwells First Steps in number theory a primer on divisability - Shilesh Shirali
37. Themescow Puzzles - 359 Mathematical Recreations - Bories A. Kordemsky
38. A biography of the world's most mysterious number - Alfred S. Posamentier